

۱۴۰۴ نوبت دوم خارج

نام درس	دهم	یازدهم	دوازدهم	ترکیبی	آسان	متوسط	سخت
ریاضیات	۶	۱۸	۱۳	۳	۴	۲۳	۱۳
فیزیک	۷	۹	۱۸	۱	۱۳	۲۱	۱
شیمی	۹	۸	۱۱	۲	۸	۱۶	۶

ریاضیات

۱- گزینه ۴

درس نامه به دنباله‌ای که جمله اولش غیر صفر باشد و هر جمله‌اش (به غیر از اولی) از ضرب جمله قبل از خودش در یک عدد غیر صفر به دست می‌آید؛ دنباله هندسی می‌گوییم.

گام ۱ دنباله « $a, a^2, \dots$ » هندسی نیست، چون طبق درس نامه، جمله اول دنباله هندسی نمی‌تواند صفر باشد. حالا بیا ببیند رفتار سه گزینه دیگر را بررسی کنیم:

$$a, \frac{a}{2}, \frac{a}{4}, \dots$$

$$a, a, a, \dots$$

$$\frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \frac{1}{a}, \dots$$

گام ۲ در تمام گزینه‌ها هر جمله از ضرب جمله قبلی‌اش در یک عدد ثابت به دست می‌آید، پس باید شرط دوم، یعنی صفر نبودن جمله اول را بررسی کنیم. **گام ۳** و **گام ۴** هندسی نیستند، چون در حالتی که $a = 0$ باشد، جمله اولشان صفر می‌شود. اما در **گام ۵** به خاطر وجود $\frac{1}{a}$ و حقیقی بودن جملات، $a \neq 0$ می‌شود، پس در این گزینه شرط صفر نبودن جمله اول هم برقرار است. پس همین گزینه جواب است.

۲- گزینه ۲

درس نامه اتحاد مربع و مکعب دوجمله‌ای را بلد باشید:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \quad (a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$$

گام ۱ صورت و مخرج کسر داده شده را جداگانه ساده می‌کنیم:

$$8x^3 - 36x^2 + 54x - 27 = (2x - 3)^3$$

گام ۲ مخرج: از ۲ که فاکتور بگیریم می‌توانیم از اتحاد مربع دوجمله‌ای استفاده کنیم:

$$8x^2 - 24x + 18 = 2(4x^2 - 12x + 9) = 2(2x - 3)^2$$

گام ۳ حالا می‌توانیم کسر داده شده را ساده تر بنویسیم:

$$A = \frac{8x^3 - 36x^2 + 54x - 27}{8x^2 - 24x + 18} = \frac{(2x - 3)^3}{2(2x - 3)^2} = \frac{2x - 3}{2} \quad (*)$$

گام ۴ به گفته سوال $x^2 - 3x + 1 = 0$ است. از این تساوی $2x - 3$ را به دست می‌آوریم:

$$x^2 - 3x + 1 = 0 \Rightarrow x^2 - 3x = -1 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 - 12x = -4$$

$$\xrightarrow{+9} 4x^2 - 12x + 9 = 5 \Rightarrow (2x - 3)^2 = 5 \Rightarrow 2x - 3 = \pm\sqrt{5}$$

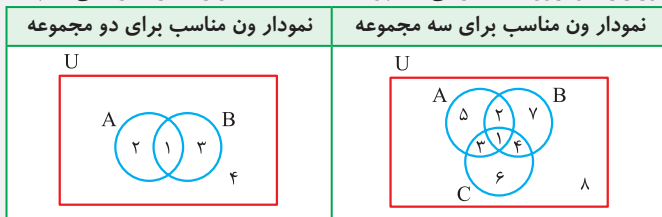
باید از ریشه بزرگتر استفاده کنیم، پس $2x - 3 = \sqrt{5}$ را در (*) جای گذاری می‌کنیم:

$$A = \frac{\sqrt{5}}{2} = 0.5\sqrt{5}$$

۳- گزینه ۴

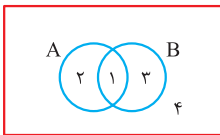
درس نامه ۱ بعضی وقت‌ها یک عبارت مجموعه‌ای (نسبتاً) طولانی به ما می‌دهند و می‌گویند، این عبارت با کدام مجموعه برابر است (یا کدام گزینه درست است). برای حل کردن این سؤالات کارهای زیر را انجام می‌دهیم:

الف) می‌بینیم عبارت صورت سؤال چند مجموعه دارد (معمولاً یا ۲ تا یا ۳ تا). در ادامه مطابق جدول زیر، نمودار ون مناسب را می‌کشیم و قسمت‌های مختلفش را شماره گذاری می‌کنیم:



ب) حالا عبارت صورت سؤال را بر حسب شماره‌ها بازنویسی می‌کنیم، مثلاً در حالتی که سه مجموعه داشته باشیم، طبق جدول بالا به جای A ، مجموعه $\{1, 2, 3, 5\}$ و در حالتی که دو مجموعه داشته باشیم به جای A ، $\{1, 2\}$ را می‌نویسیم.

گام ۱ عبارت داده شده شامل دو مجموعه A و B است، پس طبق درس نامه نمودار ون را به این صورت می‌کشیم. با توجه به نمودار می‌توانیم بنویسیم:



$$\diamond (B \cap A) = \{2, 4\} \cap \{1, 2\} = \{2\}$$

$$\diamond (B - A) \cup A' = \{3\} \cup \{3, 4\} = \{3, 4\}$$

$$\diamond A - B = \{2\}$$

گام ۲ حالا موارد بالا را در عبارت $M = (B' \cap A) \cup [(B - A) \cup A'] \cap (A - B)$ جای گذاری می‌کنیم:

$$M = \{2\} \cup [\{3, 4\} \cap \{2\}] = \{2\} \cup \emptyset = \{2\}$$

طبق نمودار بالا، $\{2\}$ همان $A - B$ است.

۴- گزینه ۳

درس نامه ۱ هم‌ارزهای زیر را بلد باشید:

$\bigcirc \Rightarrow \square \equiv \sim \bigcirc \vee \square$	تبدیل « $\Rightarrow$ » به « $\vee$ »
$\sim(\bigcirc \vee \square) \equiv \sim \bigcirc \wedge \sim \square, \sim(\bigcirc \wedge \square) \equiv \sim \bigcirc \vee \sim \square$	دمورگان
$\bigcirc \vee \square \equiv \square \vee \bigcirc, \bigcirc \wedge \square \equiv \square \wedge \bigcirc$	جابه جایی
$(\bigcirc \wedge \square) \vee (\bigcirc \wedge \triangle) \equiv \bigcirc \wedge (\square \vee \triangle)$ $(\bigcirc \vee \square) \wedge (\bigcirc \vee \triangle) \equiv \bigcirc \vee (\square \wedge \triangle)$	فاکتورگیری

۲ جدول ارزش گزاره $p \Rightarrow q$ (همون اگر p ، آنگاه q) و $p \wedge q$ (همون p و q) به صورت زیر است. با توجه به جدول می‌توانیم بگوییم گزاره‌های به فرم $\bigcirc \Rightarrow \bigcirc$ ن همیشه درست‌اند.

p	q	$p \Rightarrow q$	$p \wedge q$
د	د	د	د
د	ن	ن	ن
ن	د	د	ن
ن	ن	د	ن

(ب) جمع و تفریق دو لگاریتم با مبنای یکسان، به این صورت انجام می‌شود:

$$\log_a b + \log_a c = \log_a bc \quad \text{و} \quad \log_a b - \log_a c = \log_a \frac{b}{c}$$

(پ) لگاریتم، توان روی عبارت جلویی را به عنوان ضریب به پشت خودش می‌برد؛ یعنی:

$$\log_a b^m = m \log_a b$$

(ت) لگاریتم، معکوس توان روی مبنایش را به عنوان ضریب به پشت خودش می‌برد؛ یعنی:

$$\log_a b = \frac{1}{n} \log_a b^n$$

$$\log_a b^m = \frac{m}{n} \log_a b$$

(ث) ترکیب دو قانون قبلی، این جوری می‌شود:

(ج) در عبارت‌هایی مثل $a^{\log_b c}$ که در آن‌ها عدد به توان لگاریتم می‌رسد، می‌توانیم جای

$$a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$$

و c را عوض کنیم:

$$\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$$

(چ) اگر جای عدد و مبنای عوض کنیم؛ لگاریتم معکوس می‌شود، یعنی:

(۲) ریشه‌های معادله را می‌توانیم در آن جای‌گذاری کنیم:

(گام ۵) به گفته سؤال $x = -1$ یکی از ریشه‌های معادله $(a \log_2 x)^2 + ax + b \log_2 x = 0$

است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم آن را در معادله جای‌گذاری کنیم:

$$a \log_2 (-1) - a + b \log_2 (-1) = 0 \Rightarrow (a+b) \log_2 (-1) = a \Rightarrow \frac{a+b}{a} = \frac{1}{\log_2 (-1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{\log_2 (-1)} \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{1}{\log_2 (-1)} - \frac{1}{b}$$

(گام ۶) طبق مورد (۱-ج) درس‌نامه، همان $\log_2 (-1) = 0$ است:

$$\frac{1}{a} = \log_2 (-1) - \frac{1}{b}$$

جای ۱ می‌نویسیم $\log_2 (-1)$ تا با تفریق دو لگاریتم با مبنای یکسان برسیم:

$$\frac{1}{a} = \log_2 (-1) - \log_2 (-1) \Rightarrow \frac{1}{a} = \log_2 \frac{-1}{-1} = \log_2 1$$

(گام ۷) حالا مقدار $(\sqrt{2})^a$ را به ازای $\frac{1}{a} = \log_2 1$ به دست می‌آوریم:

$$M = (\sqrt{2})^{\log_2 1} = (2^{\frac{1}{2}})^{\log_2 1} = 2^{\frac{1}{2} \log_2 1} = 2^{\frac{\text{مورد (پ-۱)}}{\text{درس‌نامه}} \log_2 (1^{\frac{1}{2}})}$$

$$= 2^{\frac{\text{مورد (ج-۱)}}{\text{درس‌نامه}} \log_2 1} = 2^{\frac{\text{مورد (ج-۱)}}{\text{درس‌نامه}} \cdot 0} = 2^0 = 1$$

گزینه ۴ - ۷

(۱) **درس‌نامه** تعداد نقاط برخورد نمودار توابع $f(x)$ و $g(x)$ همان تعداد

جواب‌های معادله $f(x) = g(x)$ است.

(۲) اگر نمودار تابع $f(x)$ را داشته باشیم، در این صورت:

♦ برای رسم نمودار تابع $f(x-a)$ باید نمودار تابع $f(x)$ را a واحد به سمت راست ببریم. ($a > 0$)

♦ برای رسم نمودار تابع $f(x+a)$ باید نمودار تابع $f(x)$ را a واحد به سمت چپ ببریم. ($a > 0$)

(۳) برای کشیدن نمودار $y = f(|x|)$ ، اول نمودار $y = f(x)$ را رسم می‌کنیم، بعد قسمت‌هایی از نمودار را که سمت چپ محور y را قرار دارند، حذف و قسمت‌هایی را که سمت راست محور y را قرار دارند، نسبت به محور y قرینه می‌کنیم:

(۴) مختصات رأس سهمی $y = Ax^2 + Bx + C$ به صورت $S(-\frac{B}{2A}, -\frac{\Delta}{4A})$ است.

(گام ۸) طبق اتحاد مربع دوجمله‌ای، $(x - \frac{1}{4})^2 = x^2 - x + \frac{1}{16}$ می‌شود، پس در معادله

به جای $x^2 - x$ می‌نویسیم $(x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}$. به جای $|4x - 2|$ هم می‌نویسیم $4|x - \frac{1}{4}|$:

$$|4x - 2| = x^2 - x + a \Rightarrow 4|x - \frac{1}{4}| = (x - \frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16} + a$$

$$\Rightarrow (x - \frac{1}{4})^2 - 4|x - \frac{1}{4}| = \frac{1}{16} - a$$

(گام ۹) « $\Rightarrow$ » را به « $\vee$ » تبدیل می‌کنیم.

$$(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv (\sim p \vee r) \Rightarrow (p \wedge q) \equiv \sim (\sim p \vee r) \vee (p \wedge q)$$

(گام ۱۰) طبق دمورگان، $\sim (\sim p \vee r) \equiv \sim (\sim p) \wedge \sim r$ است، پس:

$$\sim (\sim p \vee r) \vee (p \wedge q) \equiv (p \wedge \sim r) \vee (p \wedge q) \equiv p \wedge (\sim r \vee q)$$

فکتورگیری

$p \wedge (\sim r \vee q) \equiv p \wedge (r \Rightarrow q)$ همان $r \Rightarrow q$ است:

(گام ۱۱) سؤال به دنبال هم‌ارز نقیض گزاره بالا است که طبق دمورگان می‌شود:

$$\sim (p \wedge (r \Rightarrow q)) \equiv \sim p \vee \sim (r \Rightarrow q)$$

طبق هم‌ارزی $\square \Rightarrow \square \equiv \sim \square \vee \square$ ، در گزاره بالا می‌توانیم به جای $\sim p$

نقیضش را بنویسیم و « $\vee$ » را به « $\Rightarrow$ » تبدیل کنیم:

$$\sim p \vee \sim (r \Rightarrow q) \equiv p \Rightarrow \sim (r \Rightarrow q)$$

(تیزبازی) بیا باید فرض کنیم p و q و r همگی درست باشند؛ این جوری ارزش نقیض

گزاره داده‌شده می‌شود:

$$\sim [(p \Rightarrow r) \Rightarrow (p \wedge q)] \equiv \sim [d \Rightarrow d] \equiv \sim d$$

پس گزینه‌ای جواب است که با شرایط بالا، نادرست می‌شود. این اتفاق فقط برای

می‌افتد، ببینید:

$$p \Rightarrow \sim (q \Rightarrow r) \equiv d \Rightarrow \sim (d \Rightarrow d) \equiv d \Rightarrow \sim d \equiv \sim d$$

گزینه ۳ - ۵

(۱) **درس‌نامه** در شکل مقابل دو نقطه A و B با عرض یکسان

روی سهمی قرار دارند. میانگین طول این دو نقطه، طول رأس سهمی

را می‌دهد؛ یعنی:

$$x_S = \frac{x_A + x_B}{2}$$

(۲) اگر مختصات رأس یک سهمی به صورت $S(h, k)$ باشد، ضابطه‌اش را می‌توانیم به این

صورت بنویسیم:

$$y = a(x - h)^2 + k$$

(گام ۱) به گفته سؤال $A(2b+1, 2b-b^2)$ و $B(2b-1, 2b-b^2)$ دو نقطه با

مؤلفه‌های صحیح و مثبت هستند؛ پس b عددی طبیعی و طول و عرض این نقاط مثبت‌اند:

$$\begin{cases} 2b-1 > 0 \Rightarrow b > \frac{1}{2} \\ 2b+1 > 0 \Rightarrow b > -\frac{1}{2} \\ 2b-b^2 > 0 \Rightarrow b(2-b) > 0 \xrightarrow{\text{بین ریشه‌ها}} 0 < b < 2 \end{cases}$$

$$\frac{1}{2} < b < 2 \xrightarrow{b \in \mathbb{N}} b = 1$$

اشتراک می‌گیریم:

پس مختصات A و B به این صورت می‌شود:

$$A(3, 1), B(1, 1)$$

(گام ۲) دو نقطه بالا که عرض یکسانی هم دارند، روی سهمی‌اند، پس طبق مورد (۱)

درس‌نامه، میانگین طولشان، طول رأس سهمی را می‌دهد:

$$x_S = \frac{3+1}{2} = 2$$

پس فرض می‌کنیم مختصات رأس سهمی به صورت $S(2, k)$ باشد، در این صورت طبق

$$y = m(x-2)^2 + k$$

مورد (۲) درس‌نامه معادله‌اش می‌شود:

$$\text{از مقایسه } y = m(x-2)^2 + k \text{ با تساوی بالا، نتیجه می‌گیریم که:}$$

$$-\alpha + 1 = -2 \Rightarrow \alpha = 3$$

$$y = m(x-2)^2 + 4 \quad (**)$$

$\alpha = 3$ را در (*) جای‌گذاری می‌کنیم:

(گام ۳) نقطه $B(1, 1)$ روی سهمی قرار دارد، پس باید در (**) صدق کند:

$$1 = m(1-2)^2 + 4 \Rightarrow m = 1-4 = -3$$

گزینه ۲ - ۶

(۱) **درس‌نامه** در دنیای لگاریتم‌ها، قوانین زیر برقرارند:

$$a^c = b$$

(الف) اگر $\log_a b = c$ باشد، می‌توانیم بنویسیم:

پس $\log_a a = 1$ می‌شود.

۱۰- گزینه ۱

گام ۱ به دنبال $f^{-1}(-1)$ هستیم، پس طبق مورد (۲) درس نامه، فرض می‌کنیم $f^{-1}(-1) = \alpha$ باشد؛ این جوری می‌توانیم بنویسیم:

$$f(\alpha) = -1 \xrightarrow{(*)} -1 = \log_3(3\alpha - 1) \Rightarrow 3\alpha - 1 = 3^{-1} = \frac{1}{3} \quad (**)$$

$$\Rightarrow 3\alpha = 1 + \frac{1}{3} \Rightarrow 3\alpha = \frac{4}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{3}$$

بنابراین طبق $(**)$ ، $f^{-1}(-1) = \frac{1}{3}$ می‌شود.

۱۲- گزینه ۲

درس نامه ۱ علامت نسبت‌های مثلثاتی در ناحیه‌های مختلف دستگاه مختصات این‌طوری است:

همه مثبت، فقط سینوس مثبت، فقط کسینوس مثبت، تانژانت و کتانژانت مثبت.

۲ اتحادهای مثلثاتی زیر را بلد باشید:

$$\diamond \tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \quad \diamond \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\diamond \sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1 \quad \text{یا} \quad \sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha \quad \text{یا} \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

$$\diamond 1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \quad \diamond 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

۳ نسبت‌های مثلثاتی زوایای « $\pi - \alpha$ » به صورت زیرند:

$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$
$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$

گام ۱ برای ساده کردن، $\sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha}}$ صورت و مخرج را در $1 + \sin \alpha$ ضرب می‌کنیم:

$$M = \sqrt{\frac{1+\sin \alpha}{1-\sin \alpha} \times \frac{1+\sin \alpha}{1+\sin \alpha}} = \sqrt{\frac{(1+\sin \alpha)^2}{1-\sin^2 \alpha}}$$

طبق مورد (۲) درس نامه، $1 - \sin^2 \alpha$ همان $\cos^2 \alpha$ است:

$$M = \sqrt{\frac{(1+\sin \alpha)^2}{\cos^2 \alpha}} = \frac{|1+\sin \alpha|}{|\cos \alpha|}$$

$-1 \leq \sin \alpha \leq 1$ است، پس $1 + \sin \alpha$ همواره نامنفی است و خودش از قدرمطلق خارج می‌شود. از طرفی به گفته سؤال α در ناحیه دوم دایره مثلثاتی است، پس طبق مورد (۱) درس نامه

$$M = \frac{1+\sin \alpha}{-\cos \alpha} \quad \cos \alpha < 0 \quad \text{است و قرینش از قدرمطلق خارج می‌شود:}$$

گام ۲ طبق مورد (۲) درس نامه، $1 + \tan^2 \alpha$ همان $\frac{1}{\cos^2 \alpha}$ است، پس:

$$N = \sqrt{1 + \tan^2 \alpha} = \sqrt{\frac{1}{\cos^2 \alpha}} = \frac{1}{|\cos \alpha|} = -\frac{1}{\cos \alpha}$$

$$-\frac{1+\sin \alpha}{\cos \alpha} - \left(-\frac{1}{\cos \alpha}\right) = \frac{-\sin \alpha}{\cos \alpha} = -\tan \alpha$$

گام ۳ به دنبال $M - N$ هستیم که می‌شود:

$$M = \sqrt{\frac{1+\sin 15^\circ}{1-\sin 15^\circ}} - \sqrt{1 + \tan^2 15^\circ}$$

طبق مورد (۳) درس نامه، $\sin(15^\circ) = \sin(18^\circ - 3^\circ) = \frac{1}{2}$ و

$$\tan(15^\circ) = \tan(18^\circ - 3^\circ) = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$M = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}} - \sqrt{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2} = \sqrt{\frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}}} - \sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{3} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{3}{\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

۱۱- گزینه ۴

درس نامه ۱ اگر نقطه (a, b) روی تابع وارون پذیر f باشد، نقطه (b, a) روی

$$f^{-1} \text{ قرار دارد و برعکس. بنابراین می‌توانیم بنویسیم: } f(a) = b \Leftrightarrow f^{-1}(b) = a$$

۲ اگر f تابعی اکیداً صعودی باشد، وارونش را فقط روی خط $y = x$ (نیمساز ناحیه اول و سوم) قطع می‌کند؛ این یعنی اگر f اکیداً صعودی باشد می‌توانیم به جای حل معادله $f(x) = f^{-1}(x)$ اما اگر f تابعی اکیداً نزولی باشد، ممکن است وارونش را در خارج از خط $y = x$ هم قطع کند. مثلاً تابع اکیداً نزولی f در شکل مقابل، وارونش را در سه نقطه A ، B و O قطع کرده که A و B روی خط $y = x$ قرار ندارند. بنابراین اگر f اکیداً صعودی نباشد، معادله $f(x) = x$ فقط نقاط برخورد f و f^{-1} روی خط $y = x$ را می‌دهد.

گام ۱ به گفته سؤال f تابعی وارون پذیر است، پس طبق مورد (۱) درس نامه از تساوی $f(f(a)) = a$ نتیجه می‌گیریم که: $(*) \quad f^{-1}(a) = f(a)$

گام ۲ طبق مورد (۲) درس نامه اگر تابع f در همسایگی a اکیداً صعودی باشد، می‌توانیم به جای حل معادله $(*)$ ، معادله $f(a) = a$ را حل کنیم. اما سؤال به چنین چیزی اشاره نکرده. فرض می‌کنیم طراح به دنبال نقاط تقاطع f و f^{-1} روی خط $y = x$ است و معادله $f(a) = a$ را حل می‌کنیم؛ چون در غیر این صورت حل معادله $(*)$ برای ما غیرممکن است. با توجه به این که $f(x) = 4x - x\sqrt{x} - 3\sqrt{x} + 9$ است، معادله $f(a) = a$ را می‌سازیم:

$$4a - a\sqrt{a} - 3\sqrt{a} + 9 = a \Rightarrow (3a + 9) + (-a\sqrt{a} - 3\sqrt{a}) = 0$$

$$\Rightarrow 3(a + 3) - \sqrt{a}(a + 3) = 0 \Rightarrow (a + 3)(3 - \sqrt{a}) = 0$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 3 = 0 \Rightarrow a = -3 \\ 3 - \sqrt{a} = 0 \Rightarrow \sqrt{a} = 3 \xrightarrow{\text{توان ۲}} a = 9 \end{cases}$$

به خاطر وجود $\sqrt{x}$ در $f(x)$ ، باید $a \geq 0$ باشد، پس $a = 9$ را می‌پذیریم.

گام ۳ به دنبال $f(a - 5)$ به ازای $a = 9$ هستیم که می‌شود:

$$f(9 - 5) = f(4) = 4(4) - 4\sqrt{4} - 3\sqrt{4} + 9 = 16 - 8 - 6 + 9 = 11$$

۱۲- گزینه ۴

درس نامه ۱ ریشه عبارت جلوی لگاریتم، معادله مجانب قائمش را می‌دهد. مثلاً

معادله مجانب قائم تابع $y = -3 \log(x - 1)$ به صورت $x = 1$ است.

۲ برای به دست آوردن $f^{-1}(\alpha)$ ، بدون به دست آوردن f^{-1} ، اول فرض می‌کنیم $f(\beta) = \alpha$ باشد. در این صورت می‌توانیم بنویسیم:

حالا با حل معادله بالا، β را به دست می‌آوریم.

گام ۱ در شکل زیر، $x = \frac{1}{4}$ ، مجانب قائم تابع $f(x) = \log_3(ax + b)$ است، پس طبق مورد (۱) درس نامه، $x = \frac{1}{4}$ باید ریشه عبارت $ax + b$ باشد:

$$\frac{1}{4}a + b = 0 \quad (۱)$$

گام ۲ طبق شکل بالا، نقطه $A(7, 3)$ روی نمودار قرار دارد، پس $f(7) = 3$ می‌شود.

$$f(x) = \log_3(ax + b) \Rightarrow 3 = \log_3(7a + b) \Rightarrow 7a + b = 3^3 = 27 \quad (۲)$$

گام ۳ دستگاه حاصل از (۱) و (۲) را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \frac{1}{4}a + b = 0 \\ 7a + b = 27 \end{cases} \xrightarrow{\text{بالایی - یابینی}} \frac{3}{4}a = 27 \Rightarrow a = 36$$

$$\xrightarrow{\text{جای‌گذاری در بالایی}} \frac{1}{4}(36) + b = 0 \Rightarrow b = -9$$

پس $f(x) = \log_3(36x - 9)$ (*) به این صورت می‌شود:



گام ۳ به کمک درس نامه، نسبت ها را ساده می کنیم:

$$\diamond \cos(135^\circ) = \cos(\underbrace{180^\circ - 45^\circ}_{\pi}) = \cos 45^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\diamond \cos(297^\circ) = \cos(\underbrace{270^\circ + 27^\circ}_{\frac{3\pi}{2}}) = \sin 27^\circ$$

$$\diamond \cos(63^\circ) = \cos(\underbrace{90^\circ - 27^\circ}_{\frac{\pi}{2}}) = \sin 27^\circ$$

$$\diamond \sin(12^\circ) = \cos(\underbrace{180^\circ - 6^\circ}_{\pi}) = \sin 6^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$A = \sqrt{2} \cos(135^\circ) \cos(297^\circ) + \sqrt{3} \cos(63^\circ) \sin(12^\circ)$$

$$A = \sqrt{2}(-\frac{\sqrt{2}}{2})(\sin 27^\circ) + \sqrt{3}(\sin 27^\circ)(\frac{\sqrt{3}}{2}) = -\sin 27^\circ + \frac{3}{2} \sin 27^\circ = \frac{1}{2} \sin 27^\circ$$

پس $2A$ می شود $\sin 27^\circ$ (۰/۵ $\sin 27^\circ$)

گزینه ۳ - ۱۵

درس نامه ۱ $\sin$ و $\tan$ مضارب صحیح π و همین طور $\cos$ و $\cot$ مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ همگی برابر صفرند.

۲) فرم کلی جواب های معادله $\tan \hat{A} = \tan \hat{B}$ به صورت $\hat{A} = k\pi + \hat{B}$ است.

۳) نسبت های مثلثاتی زوایای قرینه به صورت زیرند:

$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$
$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$

گام ۱ طبق مورد (۱) درس نامه، $\cot(\frac{3\pi}{4}) = 0$ است، پس می توانیم بنویسیم:

$$\tan(3x - \frac{\pi}{4}) + \tan 2(x - \frac{\pi}{4}) = \cot(\frac{3\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \tan(3x - \frac{\pi}{4}) = -\tan(2x - \pi) (*)$$

گام ۲ طبق مورد (۳) درس نامه، $-\tan(2x - \pi)$ در تساوی بالا همان $\tan(-2x + \pi)$ است:

$$\tan(3x - \frac{\pi}{4}) = \tan(\pi - 2x)$$

گام ۳ حالا معادله بالا را به کمک مورد (۲) درس نامه حل می کنیم:

$$3x - \frac{\pi}{4} = k\pi + (\pi - 2x) \Rightarrow \Delta x = k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \Rightarrow \Delta x = k\pi + \frac{5\pi}{4}$$

$$\Rightarrow \Delta x = \frac{\pi}{4}(3k + 5) \Rightarrow x = \frac{3k + 5}{15} \pi$$

$$\xrightarrow[k=-1,0,1,2,3]{x \in [0, \pi]} x = \frac{\pi}{15}, \frac{4\pi}{15}, \frac{7\pi}{15}, \frac{10\pi}{15}, \frac{13\pi}{15}$$

پس معادله ۵ جواب دارد.

گزینه ۴ - ۱۶

$$\text{گام ۱ به جای } \sqrt{x^2 - \frac{9}{a}} \text{ می نویسیم } \sqrt{\frac{27}{a}} + \sqrt{x - \frac{3}{a}} \cdot \sqrt{x + \frac{3}{a}}$$

$$M = \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{a})^+} \frac{\sqrt{x - \frac{3}{a}} + \sqrt{x + \frac{3}{a}} - \sqrt{\frac{27}{a}}}{\sqrt{x^2 - \frac{9}{a}}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{3}{a})^+} \frac{\sqrt{x - \frac{3}{a}} + \sqrt{x + \frac{3}{a}} - \sqrt{\frac{27}{a}}}{\sqrt{x - \frac{3}{a}} \cdot \sqrt{x + \frac{3}{a}}}$$

تنها گزینه ای که به ازای $\alpha = 15^\circ$ ، $\frac{1}{\sqrt{3}}$ می دهد، $-\tan \alpha$ در $\diamond$ است؛ ببینید:

$$-\tan(180^\circ - 3^\circ) = -(-\tan 3^\circ) = \frac{1}{\sqrt{3}} \checkmark$$

گزینه ۳ - ۱۳

درس نامه $\tan(\alpha \pm \beta)$ را به صورت زیر بسط می دهیم:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \cdot \tan \beta}, \quad \tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \cdot \tan \beta}$$

گام ۱ فرض می کنیم $\hat{A} = \alpha + 25^\circ$ و $\hat{B} = 35^\circ - \alpha$ باشد. زاویه معروفی $\hat{A} + \hat{B} = (\alpha + 25^\circ) + (35^\circ - \alpha) = 60^\circ$ می شود؛ ببینید:

گام ۲ حالا به کمک درس نامه $\tan(\hat{A} + \hat{B})$ را بسط می دهیم:

$$\tan(\hat{A} + \hat{B}) = \frac{\tan \hat{A} + \tan \hat{B}}{1 - \tan \hat{A} \cdot \tan \hat{B}}$$

به گفته سوال $\tan(\alpha + 25^\circ) = \frac{\sqrt{3}}{4}$ است. این مقدار را در تساوی بالا جای گذاری می کنیم:

$$\tan 60^\circ = \frac{\frac{\sqrt{3}}{4} + \tan \hat{B}}{1 - \frac{\sqrt{3}}{4} \tan \hat{B}} \Rightarrow \sqrt{3} - \frac{3}{4} \tan \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{4} + \tan \hat{B}$$

$$\Rightarrow \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{5}{4} \tan \hat{B} \Rightarrow \tan \hat{B} = \frac{\sqrt{3}}{5} (*)$$

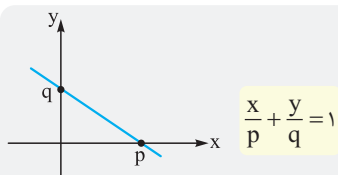
گام ۳ به دنبال $\cot(35^\circ - \alpha)$ هستیم که می شود:

$$\cot \hat{B} = \frac{1}{\tan \hat{B}} = \frac{5}{\sqrt{3}} \times \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{5\sqrt{3}}{3}$$

گزینه ۲ - ۱۴

درس نامه برای ساده کردن نسبت های مثلثاتی به فرم $k\pi \pm \alpha$ و $\frac{k\pi}{2} \pm \alpha$ جدول زیر توجه کنید:

فرم زاویه	روش ساده کردن
$k\pi \pm \alpha$ عدد صحیح	گام ۱ $k\pi$ را به همراه $\pm$ بعدش حذف می کنیم و فقط نسبت مثلثاتی α را می نویسیم. در سمت چپ نسبت جدید یک دایره توخالی هم می گذاریم. مثلاً برای $\cos(11\pi - \alpha)$ داریم:
$k\pi \pm \alpha$ عدد صحیح	گام ۲ حالا باید ببینیم $k\pi \pm \alpha$ در کدام ناحیه قرار دارد تا علامت نسبت مثلثاتی اش مشخص شود. این علامت را در دایره توخالی می نویسیم. مثلاً در نسبت بالا $10\pi + \pi - \alpha$ در ناحیه دوم مثلثاتی است (قابل حذف)
$k\pi \pm \alpha$ عدد فرد	گام ۳ زاویه ای در ربع ۲ است و کسینوس در این ناحیه منفی است، پس در دایره توخالی منفی قرار می دهیم:
$k\pi \pm \alpha$ عدد فرد	همان کارهایی که برای « $k\pi \pm \alpha$ » انجام دادیم، این جا هم انجام می دهیم؛ با این تفاوت که در گام ۱ نسبت مثلثاتی را تغییر می دهیم. یعنی $\sin$ و $\cos$ و همین طور $\tan$ و $\cot$ را به همدیگر تبدیل می کنیم:
$k\pi \pm \alpha$ عدد فرد	گام ۴ از زاویه $11\pi - \alpha$ مضارب ۲ π را حذف کنیم به $4\pi + \frac{3\pi}{2} - \alpha$ حذف می رسمیم که در ربع ۳ قرار دارد.



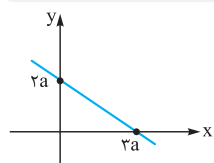
۳ هم‌ارزی پرتوان برای حد $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{a_1 x^m + a_2 x^{m-1} + \dots + a_n x + k}{b_1 x^n + b_2 x^{n-1} + \dots + b_n x + k'}$ سه حالت زیر را مطرح می‌کند:

(الف) وقتی درجه صورت از درجه مخرج بیشتر باشد، یعنی $m > n$ ، حاصل حد بی‌نهایت می‌شود.

(ب) وقتی درجه مخرج از درجه صورت بیشتر باشد، یعنی $n > m$ ، حاصل حد صفر می‌شود.

(پ) وقتی درجه صورت با درجه مخرج برابر باشد، یعنی $m = n$ ، حاصل حد می‌شود:

$$\frac{\text{ضریب بزرگترین توان } x \text{ در صورت}}{\text{ضریب بزرگترین توان } x \text{ در مخرج}} = \frac{a_1}{b_1}$$



گام ۲ در شکل مقابل، طول از مبدأ خط f برابر $2a$ و

عرض از مبدأش برابر $2a$ است؛ پس طبق مورد (۲)

درس‌نامه معادله f می‌شود:

$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2a} = 1 \xrightarrow{\text{ضرب در } 2a} \frac{x}{2} + \frac{y}{2} = a \Rightarrow \frac{y}{2} = a - \frac{x}{2}$$

$$\Rightarrow y = 2a - \frac{1}{2}x \quad \text{یا} \quad f(x) = 2a - \frac{1}{2}x \quad (1)$$

گام ۳ حالا به کمک مورد (۱) درس‌نامه، f^{-1} را به دست می‌آوریم:

$$y = 2a - \frac{1}{2}x \xrightarrow{\text{جای } x \text{ و } y \text{ را عوض می‌کنیم.}} x = 2a - \frac{1}{2}y \Rightarrow \frac{1}{2}y = 2a - x$$

$$\xrightarrow{\times \frac{2}{1}} y = 4a - 2x \Rightarrow f^{-1}(x) = 4a - 2x \quad (2)$$

گام ۴ حالا موارد (۱) و (۲) را در $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f^2(x)}{x|f^{-1}(x)|}$ جای گذاری می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(2a - \frac{1}{2}x)^2}{x|2a - \frac{1}{2}x|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}ax + 4a^2}{x(2a - \frac{1}{2}x)} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}ax + 4a^2}{-\frac{1}{2}x^2 + 2ax}$$

در حد بالا، بزرگ‌ترین درجه صورت و مخرج برابر ۲ است، پس طبق هم‌ارزی پرتوان (مورد)

$$\frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2} \quad \text{حاصل حد می‌شود}$$

۴ تیزبازی طبق نمودار مقابل، دو نقطه $A(0, 2a)$ و

$B(2a, 0)$ روی خط f قرار دارند، پس شیبش می‌شود:

$$m_f = \frac{0 - 2a}{2a - 0} = -\frac{2a}{2a} = -1$$

$$f(x) = -x + \dots$$

پس معادله خط f می‌شود:

حالا نکته زیر را بخوانید:

★ نکته اگر f تابعی خطی باشد، f^{-1} هم تابعی خطی می‌شود که شیبش معکوس شیب f است.

طبق نکته بالا شیب f^{-1} تابعی خطی با شیب $\frac{1}{m_f}$ می‌شود:

$$f^{-1}(x) = -\frac{1}{2}x + \dots$$

حالا می‌توانیم خواسته سؤال را به دست بیاوریم:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f^2(x)}{x|f^{-1}(x)|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(-\frac{1}{2}x + \dots)^2}{x|-\frac{1}{2}x + \dots|} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\frac{1}{4}x^2 + \dots}{x(-\frac{1}{2}x)} = \frac{\frac{1}{4}}{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow (\frac{2}{a})^+} \frac{\sqrt{x - \frac{2}{a}}}{\sqrt{x - \frac{2}{a}} \cdot \sqrt{x + \frac{2}{a}}} + \lim_{x \rightarrow (\frac{2}{a})^+} \frac{\sqrt{x - \frac{2}{a}}}{\sqrt{x - \frac{2}{a}} \cdot \sqrt{x + \frac{2}{a}}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{a}} + \lim_{x \rightarrow (\frac{2}{a})^+} \frac{\sqrt{x - \frac{2}{a}}}{\sqrt{x - \frac{2}{a}} \cdot \sqrt{x + \frac{2}{a}}} \quad (*)$$

گام ۳ برای محاسبه (*)، صورت و مخرج را در مزدوج $\sqrt{x - \frac{2}{a}}$ ضرب می‌کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{2}{a})^+} \frac{\sqrt{x - \frac{2}{a}}}{\sqrt{x - \frac{2}{a}} \cdot \sqrt{x + \frac{2}{a}}} \times \frac{\sqrt{x + \frac{2}{a}}}{\sqrt{x + \frac{2}{a}}} = \lim_{x \rightarrow (\frac{2}{a})^+} \frac{\sqrt{x - \frac{2}{a}}}{\sqrt{x - \frac{2}{a}} \cdot \sqrt{x + \frac{2}{a}}} \times \frac{1}{\sqrt{x + \frac{2}{a}}}$$

$$= \frac{0}{0} = 0$$

گام ۴ حالا به جای (*)، صفر می‌گذاریم:

$$M = \frac{2}{\sqrt{a}} + 0 = \frac{2}{\sqrt{a}} = \sqrt{\frac{4}{a}} = \sqrt{\frac{4a}{a^2}} = \sqrt{\frac{4}{a}}$$

۱۷ - گزینه ۱

۱ درس‌نامه در مورد حد بی‌نهایت، رابطه‌های زیر را بلد باشید:

$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$	$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty$
$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty$	$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty$

۲ برای حل معادله‌های به فرم $|\square| = \square$ ، باید دو معادله $\square = \square$ و $\square = -\square$ را حل کنید.

گام ۳ به ازای $x = (\frac{1}{\sqrt{3}})^+ = 0 / \dots$ ، $[-x] = [-0 / \dots] = -1$ می‌شود؛ پس می‌توانیم بنویسیم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}})^+} \frac{[-x] + a}{\sqrt{\frac{1}{3}}x + a} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{1}{\sqrt{3}})^+} \frac{a - 1}{\sqrt{\frac{1}{3}}x + a} = -\infty$$

گام ۴ طبق مورد (۱) درس‌نامه، حد بالا وقتی برابر با $\pm\infty$ می‌شود که $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، ریشه مخرج باشد:

$$|\frac{\sqrt{3}}{3}(\frac{1}{\sqrt{3}}) + a| + a = 0 \Rightarrow |\frac{1}{3} + a| = -a$$

طبق مورد (۲) درس‌نامه، برای حل معادله بالا باید معادله‌های زیر را حل کنیم:

$$\begin{cases} \frac{1}{3} + a = a \Rightarrow \frac{1}{3} = 0 \quad \times \\ \frac{1}{3} + a = -a \Rightarrow -2a = \frac{1}{3} \Rightarrow a = -\frac{1}{6} \quad \checkmark \end{cases}$$

پس $[a]$ می‌شود $[-\frac{1}{6}] = -1$.

۱۸ - گزینه ۲

۱ درس‌نامه برای نوشتن معکوس یک تابع مثل $y = 2x - 1$ ، کارهای زیر را انجام

می‌دهیم:

$$x = 2y - 1$$

♦ جای x و y را عوض می‌کنیم:

$$2y = x + 1 \Rightarrow y = \frac{x + 1}{2}$$

♦ y را تنها می‌کنیم:

۲ اگر خطی مثل شکل داده‌شده، طول از مبدأش p و عرض از مبدأش q باشد، معادله‌اش به این صورت می‌شود:

۲ اگر $u \rightarrow 0$ ، می‌توانیم به جای $\sin u$ و $\tan u$ ، خود u را بنویسیم.

گام ۱ در $x = \frac{\pi}{4}$ ، $\tan(\frac{\pi}{4} - x)$ و $2x - \pi$ هر دو صفرند ولی $\sin x$ می‌شود

$\sin \frac{\pi}{4} = 1$ که صفر نیست، پس قبل از رفع ابهام به جای $\sin x$ می‌نویسیم ۱:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x \cdot \tan(\frac{\pi}{4} - x)}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x)}{2x - \pi}$$

گام ۲ وقتی $x \rightarrow \frac{\pi}{4}$ ، $x - \frac{\pi}{4}$ به سمت صفر میل می‌کند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه

می‌توانیم در حد بالا به جای $\tan(\frac{\pi}{4} - x)$ بنویسیم φ .

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - x)}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\frac{\pi}{4} - x}{2x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{-\frac{1}{4}(2x - \pi)}{(2x - \pi)} = -\frac{1}{4}$$

۲۱- گزینه ۱

درس‌نامه ۱ تابع f به دو شرط در $x = a$ مشتق‌پذیر است:

♦ در $x = a$ پیوسته باشد.

♦ مشتق چپ و راست f در $x = a$ برابر باشند.

۲ تابع $y = |f(x)|$ در ریشه‌های ساده $f(x)$ ، مشتق‌ناپذیر است.

۳ اگر $m > n$ باشد، تابع $y = \sqrt[n]{x-a}$ در $x = a$ مشتق‌ناپذیر است.

۴ $(u^n)' = nu'u^{n-1}$

گام ۱ در ضابطه پایینی f ، $\sqrt{x^2}$ همان $|x|$ است، پس:

$$f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x^2} & x \geq 1 \\ b+c|x| & x < 1 \end{cases}$$

طبق مورد (۲) و (۳) درس‌نامه، $|x|$ و $\sqrt{x^2}$ در $x = 0$ مشتق‌ناپذیرند ولی $x = 0$ در دامنه ضابطه بالایی قرار ندارند؛ بنابراین آن تکیه‌های f در آن مشتق‌ناپذیر است، $x = 0$ در ضابطه پایینی است.

گام ۲ برای این‌که نقطه مشتق‌ناپذیری دیگری نداشته باشیم، باید f در $x = 1$ مشتق‌پذیر

باشد. طبق مورد (۱) درس‌نامه این اتفاق به دو شرط می‌افتد:

♦ f در $x = 1$ پیوسته باشد:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} a\sqrt{x^2} \Rightarrow a\sqrt{1^2} = \lim_{x \rightarrow 1^+} (b+c|x|)$$

$$\Rightarrow a = b+c \quad (1)$$

♦ مشتق چپ و راست f در $x = 1$ برابر باشند، در $x = 1^-$ ، $|x| = x$ می‌شود، پس برای

محاسبه $f'_-(1)$ باید از $f(x) = b+cx$ مشتق بگیریم: $f'_-(1) = c \Rightarrow f'_-(1) = c \Rightarrow f'_-(1) = c$

برای محاسبه $f'_+(1)$ هم از $f(x) = a\sqrt{x^2}$ مشتق می‌گیریم:

$$f(x) = a\sqrt{x^2} = ax^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2}ax^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow f'_+(1) = \frac{1}{2}a(1)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}a$$

حالا مشتق چپ و راست را مساوی هم می‌گذاریم:

$$c = \frac{1}{2}a \Rightarrow a = 2c \quad (2)$$

$$\frac{1}{2}c = b+c \Rightarrow b = -\frac{1}{2}c$$

$$\frac{ab}{c^2} = \frac{(\frac{1}{2}c)(-\frac{1}{2}c)}{c^2} = \frac{-\frac{1}{4}c^2}{c^2} = -\frac{1}{4}$$

بنابراین $\frac{ab}{c^2}$ می‌شود:

۱۹- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ تابع f در $x = a$ به شرطی پیوسته است که حد چپ، حد راست و

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a)$$

مقدارش در $x = a$ برابر باشند، یعنی:

گام ۱ ضابطه بالایی f را می‌توانیم ساده‌تر بنویسیم:

$$\begin{aligned} \text{ضابطه بالایی} &= \frac{|x^2 + mx - m - 1|}{m|x^2 - 1| + |x - 1|} = \frac{|(x-1)(x+1) + m(x-1)|}{m|x-1||x+1| + |x-1|} \\ &= \frac{|x-1||x+1+m|}{|x-1|(m|x+1| + 1)} \end{aligned}$$

دامنه ضابطه بالایی $x \neq 1$ است، پس $|x-1| \neq 0$ و در نتیجه می‌توانیم $|x-1|$ را از

صورت و مخرج ضابطه بالا بزنیم:

$$\text{ضابطه بالایی} = \frac{|x+1+m|}{m|x+1| + 1}$$

پس $f(x)$ می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|x+1+m|}{m|x+1| + 1} & x \neq 1 \\ \frac{m}{m+2} & x = 1 \end{cases}$$

گام ۲ تابع به شرطی در $\mathbb{R}$ پیوسته می‌شود که:

♦ ضابطه بالایی دیگر ریشه مخرج نداشته باشد؛ اگر مخرج را مساوی صفر بگذاریم به معادله

$$m|x+1| + 1 = 0 \Rightarrow m|x+1| = -1 \Rightarrow m < 0 \Rightarrow m > 0$$

♦ در $x = 1$ پیوسته باشد، طبق درس‌نامه، تابع به شرطی در $x = 1$ پیوسته است که

حد راست، حد چپ و مقدارش در $x = 1$ مساوی باشند:

حد راست و چپ: برای محاسبه هر دو باید از ضابطه بالایی استفاده کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{|1+1+m|}{m|1+1| + 1} = \frac{|m+2|}{2m+1}$$

مقدار: با توجه به ضابطه پایینی $f(1)$ می‌شود:

$$\frac{|m+2|}{2m+1} = \frac{m}{m+2}$$

هر سه مقدار را مساوی هم می‌گذاریم:

گام ۳ فهمیدیم $m > 0$ است، پس $m+2$ در معادله بالا عددی مثبت است و خودش از قدرمطلق خارج می‌شود:

$$\begin{aligned} \frac{m+2}{2m+1} &= \frac{m}{m+2} \Rightarrow (m+2)^2 = m(2m+1) \Rightarrow m^2 + 4m + 4 = 2m^2 + m \\ \Rightarrow m^2 - 3m - 4 &= 0 \Rightarrow (m-4)(m+1) = 0 \xrightarrow{m>0} m = 4 \end{aligned}$$

گام ۴ حالا $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{m}} f(x)$ را به ازای $m = 4$ به دست می‌آوریم:

$$\lim_{x \rightarrow \frac{1}{4}} f(x) = \frac{|\frac{1}{4} + 1 + 4|}{4|\frac{1}{4} + 1| + 1} = \frac{\frac{21}{4}}{4(\frac{5}{4}) + 1} = \frac{\frac{21}{4}}{5 + 1} = \frac{21}{4 \cdot 6} = \frac{7}{8}$$

۲۰- گزینه ۲

درس‌نامه ۱ در رفع ابهام $\frac{0}{0}$ ، اول عوامل ضربی غیرصفر را جای گذاری کنید؛

بعد رفع ابهام. مثلاً در حد $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x - 1} \cos(\pi x)$ می‌شود $\cos(\pi) = -1$ که غیرصفر است، پس اول جای $\cos(\pi x)$ می‌نویسیم -1 ، بعد رفع ابهام می‌کنیم:

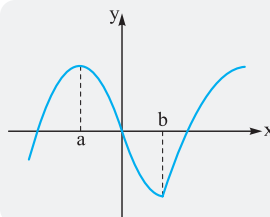
$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - x}{x - 1} \cos(\pi x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x(x^2 - 1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{-x(x-1)(x+1)}{x-1} = -2$$

۲۲- گزینه ۳



درس نامه

نقطه بحرانی، نقطه‌ای عضو دامنه است که در آن مشتق یا صفر است یا موجود نیست. مثلاً در تابع f با نمودار مقابل، $x = a, b$ بحرانی اند، چون $f'(a) = 0$ و $f'(b)$ موجود نیست.



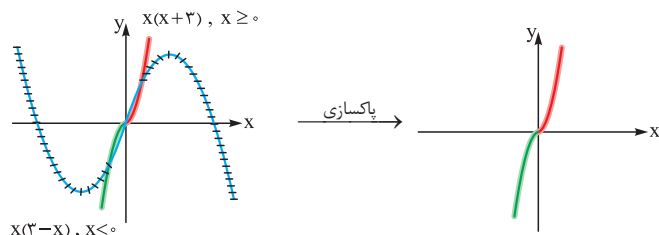
گام ۱

باید نمودار $|f(x)|$ را بکشیم. برای این کار اول $f(x) = x(|x| + 3)$ را بدون قدرمطلق می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} x(x+3) & x \geq 0 \\ x(3-x) & x < 0 \end{cases}$$

گام ۲

حالا نمودار $f(x)$ را می‌کشیم:



گام ۳

الان اگر قسمت سبز رنگ نمودار $f(x)$ را که زیر محور x ها قرار دارد، نسبت به محور x ها قرینه کنیم به نمودار تابع $|f(x)|$ می‌رسیم: با توجه به نمودار و درس‌نامه می‌توانیم بگوییم تابع $|f(x)|$ فقط در $x = 0$ بحرانی است؛ چون در این نقطه مشتق ناپذیر است.

۲۳- گزینه ۴



درس نامه

۱ اگر به تعدادی داده با میانگین $\bar{x}$ ، چند داده جدید اضافه کنیم، به شرطی میانگین داده‌های جدید همان $\bar{x}$ می‌ماند که میانگین داده‌های اضافه‌شده هم $\bar{x}$ باشد. ۲ میانگین و واریانس داده‌های $x_1, x_2, \dots, x_n$ را به ترتیب با نمادهای $\bar{x}$ و σ^2 نشان می‌دهیم و برای محاسبه‌اش از فرمول زیر استفاده می‌کنیم:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} \quad \sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n}$$

گام ۱

فرض می‌کنیم $x_1, x_2, \dots, x_5$ همان ۵ داده‌ای باشند که به گفته سؤال واریانشان برابر $\frac{16}{3}$ است؛ در این صورت طبق مورد (۲) درس‌نامه می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{16}{3} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_5 - \bar{x})^2}{5} \\ \Rightarrow (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_5 - \bar{x})^2 = 5 \times \frac{16}{3} = \frac{80}{3}$$

گام ۲

سؤال می‌گوید با اضافه کردن ۳ داده a, a و b به ۵ داده $x_1, x_2, \dots, x_5$ و x_5 با میانگین $\bar{x}$ ، میانگین داده‌های جدید همان $\bar{x}$ باقی می‌ماند؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، میانگین a, a و b هم باید $\bar{x}$ باشد:

$$\frac{a + a + b}{3} = \bar{x} \Rightarrow \bar{x} = \frac{2a + b}{3} \quad (1)$$

گام ۳

ولی واریانس ۸ داده جدید یک واحد بیشتر می‌شود، یعنی از $\frac{16}{3}$ می‌رسد به $\frac{16}{3} + 1 = \frac{19}{3}$.

$$\text{طبق (۱) میشه } \frac{19}{3} = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_5 - \bar{x})^2 + (a - \bar{x})^2 + (a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2}{8}$$

$$\Rightarrow \frac{19}{3} \times 8 = \frac{80}{3} + 2(a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2 \\ \Rightarrow 2(a - \bar{x})^2 + (b - \bar{x})^2 = \frac{152}{3} - \frac{80}{3} = \frac{72}{3} = 24$$

گام ۴

طبق رابطه (۲) می‌توانیم به جای $\bar{x}$ در تساوی بالا بنویسیم:

$$2(a - \frac{2a+b}{3})^2 + (b - \frac{2a+b}{3})^2 = 24$$

۲۴- گزینه ۲



$$\Rightarrow 2(\frac{3a-2a-b}{3})^2 + (\frac{2b-2a-b}{3})^2 = 24 \\ \Rightarrow \frac{2(a-b)^2}{9} + \frac{(b-a)^2}{9} = 24 \Rightarrow \frac{3}{9}(a-b)^2 = 24 \\ \Rightarrow (a-b)^2 = 36 \Rightarrow |a-b| = 6$$

گام ۱ ترتیب وزن ۵ نفر کلاً ۵! حالت دارد که در نیمی از آن‌ها، یعنی $\frac{5!}{2}$ نفر دوم سنگین‌تر از نفر اول است.

گام ۲ از طرفی با توجه به شکل زیر، در ۴! حالت، نفر اول سبک‌ترین است:

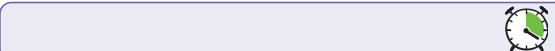
$$\bigcirc < \bigcirc < \bigcirc < \bigcirc$$

۴ حالت

$$P = \frac{4!}{5!} = \frac{2 \times 3!}{4! \times 5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

گام ۳ پس احتمال مورد نظر می‌شود:

۲۵- گزینه ۴

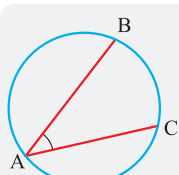


مطابق شکل، خط d را به فاصله L از Ox به موازاتش می‌کشیم. همین‌طور خط d' را به فاصله $\frac{1}{5}L$ از Oy به موازاتش رسم می‌کنیم. نقطه برخورد این دو خط جواب مسئله است. بنابراین ۴ جواب است.

۲۶- گزینه ۳

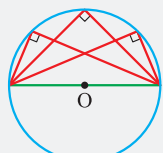


درس نامه ۱ به زاویه‌ای که مثل شکل مقابل، رأسش روی محیط دایره و دو ضلعش دو وتر از دایره باشد، زاویه محاطی می‌گوییم. اندازه این زاویه برابر با نصف اندازه کمان مقابلش است.

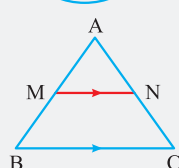


$$\hat{A} = \frac{BC}{2}$$

۲ زاویه محاطی رو به قطر مطابق شکل همیشه 90° است.



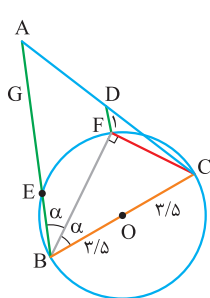
۳ در شکل مقابل، پاره‌خط MN ، وسط دو ضلع از مثلث را به هم وصل می‌کند.



$$MN = \frac{BC}{2}$$

$$MN \parallel BC$$

۴ در مثلث متساوی‌الساقین ارتفاع، نیمساز و میانه وارد بر قاعده همگی بر هم منطبق‌اند و برعکس؛ یعنی اگر در مثلثی ارتفاع وارد بر قاعده، نیمساز یا میانه هم باشد، آن مثلث متساوی‌الساقین است.



گام ۱ (تحلیل شکل مسئله) در شکل مقابل زاویه F ، زاویه محاطی رو به قطر است، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه $\hat{F} = 90^\circ$ می‌شود. به گفته سؤال $\widehat{EF}$ و $\widehat{FC}$ برابرند، پس زاویه‌های محاطی $\widehat{EBC}$ و $\widehat{FBC}$ که این کمان‌ها را می‌بینند هم برابرند؛ به همین خاطر روی شکل جفتشان را α در نظر می‌گیریم.

۲۹- گزینه ۴

درس نامه ۱ اگر مساحت یک چندضلعی محیطی برابر S و نصف محیطش p باشد، شعاع دایره محاطی اش می شود:

$$r = \frac{S}{p}$$

گام ۱ (پیدا کردن رابطه بین شعاع دایره و مساحت مثلث) فرض می کنیم شعاع دایره محاطی r و مساحت چهارضلعی برابر S باشد. به گفته سؤال محیط چهارضلعی برابر $\sqrt{80\pi}$ است، پس طبق درس نامه می توانیم بنویسیم:

$$r = \frac{S}{p} \Rightarrow r = \frac{S}{\frac{\sqrt{80\pi}}{2}} \Rightarrow S = r \times \frac{\sqrt{80\pi}}{2} \Rightarrow S = \sqrt{20\pi}r$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) مساحت ناحیه رنگی در شکل مقابل برابر ۵ است؛ پس باید بنویسیم:

$$S_{\square} - S_{\bigcirc} = 5 \Rightarrow S - \pi r^2 = 5 \xrightarrow{(*)} \sqrt{20\pi}r - \pi r^2 = 5$$

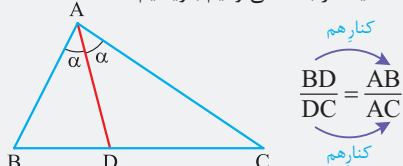
$$\Rightarrow \pi r^2 - \sqrt{20\pi}r + 5 = 0 \Rightarrow r = \frac{\sqrt{20\pi} \pm \sqrt{(\sqrt{20\pi})^2 - 4(\pi)(5)}}{2\pi} = \frac{\sqrt{20\pi}}{2\pi}$$

$$2\pi r = 2\pi \times \frac{\sqrt{20\pi}}{2\pi} = 2\sqrt{5\pi}$$

پس محیط دایره می شود:

۳۰- گزینه ۴

درس نامه ۱ نیمساز داخلی هر مثلث، ضلع مقابل را به نسبت اضلاع کناری اش قطع می کند؛ یعنی اگر در شکل زیر، AD نیمساز باشد می توانیم بنویسیم:



عکس مورد بالا هم برقرار است؛ یعنی اگر در مثلث بالا، تناسب $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$ برقرار باشد، می توانیم بگوییم AD ، نیمساز داخلی زاویه A است.

۲ برای محاسبه طول نیمساز AD در مثلث بالا از فرمول زیر استفاده می کنیم:

$$AD^2 = AB \times AC - BD \times DC$$

۳ در شکل مقابل اگر $DE \parallel BC$ باشد، طبق قضیه تالس می توانیم تناسب های زیر را بنویسیم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC} \quad \text{جزء به جزء}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC} = \frac{DE}{BC} \quad \text{جزء به کل}$$

۴ از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ می توانیم نتیجه بگیریم که $\begin{cases} a = ck \\ b = dk \end{cases}$ می شود. مثلاً اگر $\frac{a}{b} = \frac{2}{3}$ باشد،

گام ۱ (تعیین نقش DF در مثلث ADC) به گفته سؤال در شکل مقابل، نقطه D وسط ضلع BC به طول ۱۰ است؛ پس می توانیم روی شکل بنویسیم:

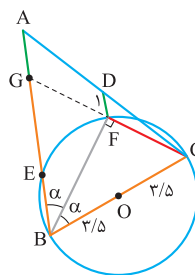
$$BD = DC = \frac{10}{2} = 5$$

سؤال می گوید در مثلث ADB ، DE نیمساز است، پس طبق مورد (۱) درس نامه می توانیم بنویسیم:

$$\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EB} \quad (1)$$

از طرفی در مثلث ABC ، EF موازی اند، پس طبق مورد (۳) درس نامه می توانیم در این مثلث تالس جزء به جزء بنویسیم:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AE}{EB} \quad (2)$$



گام ۱ (افزودن پاره خط مناسب به شکل) الان اگر FC را امتداد بدهیم تا ضلع AB را در G قطع کند؛ مثلث GBC درست می شود که در آن BF هم ارتفاع است و هم نیمساز. پس این مثلث طبق مورد (۴) درس نامه متساوی الساقین است؛ در نتیجه: BF میانه هم هست، یعنی F وسط ضلع GC است. $BG = BC \Rightarrow BG = 3/5 + 3/5 = 7$

گام ۲ (محاسبه طول AG و خواسته سؤال) به گفته سؤال، D وسط ضلع AC است. خوب به پاره خط FD در مثلث AGC نگاه کنید. این پاره خط وسط دو ضلع را به هم وصل می کند، پس طبق مورد (۳) درس نامه، طولش نصف طول ضلع سوم مثلث است:

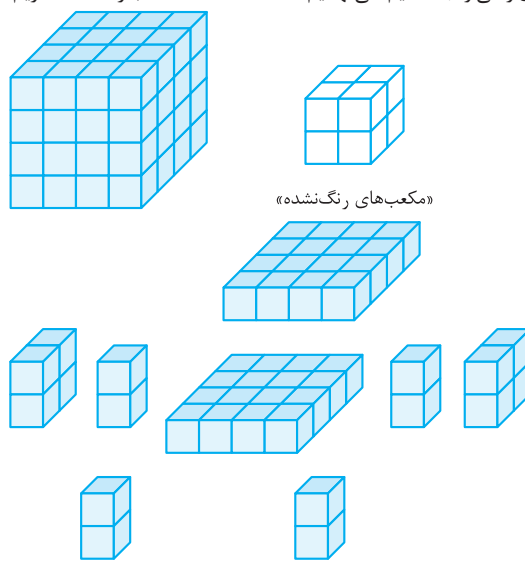
$$FD = \frac{AG}{2} \Rightarrow 1 = \frac{AG}{2} \Rightarrow AG = 2$$

$$AB = BG + GA = 7 + 2 = 9$$

بنابراین طول AB می شود:

۲۷- گزینه ۳

گام ۱ (محاسبه تعداد رنگ نشده ها) شکل زیر که « $4 \times 4 \times 4$ » مکعب کوچک دارد. اگر مثل شکل های زیر مکعب های رنگی را جدا کنیم، می فهمیم که « $2 \times 2 \times 2$ » مکعب رنگ نشده داریم.



«مکعب های رنگ شده»

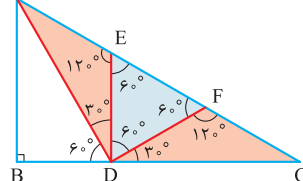
پس تعداد مکعب های رنگی برابر « $4 \times 4 \times 4 - 2 \times 2 \times 2$ » است.

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) به دنبال نسبت رنگی ها به رنگ نشده ها هستیم که می شود:

$$\frac{4 \times 4 \times 4 - 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2} = \frac{4 \times 4 \times 4}{2 \times 2 \times 2} - 1 = 8 - 1 = 7$$

۲۸- گزینه ۱

گام ۱ (محاسبه $\hat{ADF}$) به گفته سؤال مثلث ABD متساوی الاضلاع است، پس همه زاویه های داخلی اش 60° اند. پس زاویه های $\hat{AED}$ و $\hat{DFC}$ هر دو برابر « $180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$ » هستند. از طرفی سؤال می گوید مثلث های قرمز متساوی الساقین اند، پس دیگر زاویه های داخلی شان می شود « $\frac{180^\circ - 120^\circ}{2} = 30^\circ$ ».



حالا می توانیم $\hat{ADB}$ را به دست بیاوریم:

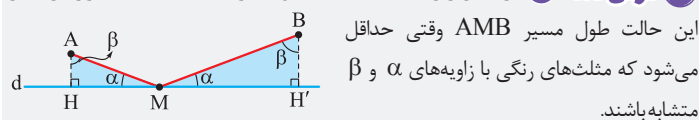
$$\hat{ADB} = 180^\circ - \hat{ADC} = 180^\circ - (30^\circ + 60^\circ + 30^\circ) = 60^\circ$$

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) به دنبال نسبت $\frac{AD}{BD}$ هستیم؛ ضلع BD مجاور به زاویه 60° در مثلث قائم الزاویه ABD است و AD وترش، پس برای به دست آوردن خواسته سؤال در این مثلث برای زاویه 60° ، کسینوس می نویسیم:

$$\cos 60^\circ = \frac{BD}{AD} \Rightarrow 2 = \frac{AD}{BD}$$

۳۲ - گزینه ۳

درس نامه ۱ در شکل زیر، نقطه‌های ثابت A و B در یک سمت خط d قرار دارند. در

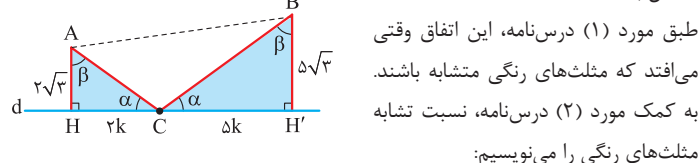


۲ برای نوشتن نسبت تشابه و مثلث، ضلع‌های رو به زاویه‌های برابر را در یک نسبت زیر هم می‌نویسیم، به طوری که در صورت نسبت‌ها اضلاع یک مثلث و در مخرج آن‌ها اضلاع مثلث دیگر قرار داشته باشند. مثلاً نسبت تشابه مثلث‌های ABC و DEC در شکل مقابل برابر می‌شود با:

$$\frac{AC}{EC} = \frac{AB}{DE} = \frac{BC}{DC}$$

(رو به alpha)
(رو به beta)
(رو به theta)

گام ۱ (تحلیل شکل مسئله) به گفته سؤال محیط مثلث ABC حداقل است. در این مثلث طول ضلع AB که ثابت است، پس محیط وقتی حداقل می‌شود که طول مسیر ACB حداقل باشد.



$$\frac{CH}{CH'} = \frac{AH}{BH'} \Rightarrow \frac{CH}{CH'} = \frac{2\sqrt{3}}{5\sqrt{3}} \Rightarrow CH = 2k, CH' = 5k$$

گام ۲ (محاسبه k و خواسته سؤال) به گفته سؤال مساحت مثلث قائم‌الزاویه AHC برابر $6\sqrt{3}$ است، پس می‌توانیم بنویسیم:

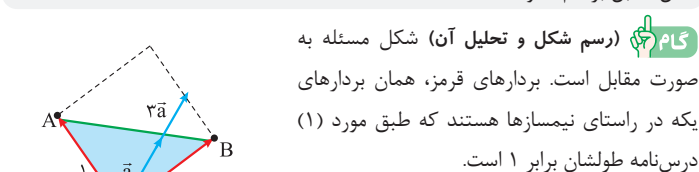
$$\frac{1}{2} AH \times CH = 6\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2} (2\sqrt{3})(2k) = 6\sqrt{3} \Rightarrow 2\sqrt{3}k = 6\sqrt{3} \Rightarrow k = 3$$

پس با توجه به شکل بالا، طول HH' می‌شود: $HH' = 2k + 5k = 7k \stackrel{k=3}{=} 7 \times 3 = 21$

۳۳ - گزینه ۲

درس نامه ۱ به هر برداری که طولش برابر ۱ باشد، بردار یک می‌گوییم.

۲ نیمسازهای داخلی و خارجی هر زاویه، مطابق شکل مقابل بر هم عمودند.



طبق شکل، بردارهای یک در واقع نیمسازهای داخلی و خارجی زاویه بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$ هستند، پس طبق مورد (۲) درس‌نامه بر هم عمودند.

گام ۱ (محاسبه خواسته سؤال) به دنبال طول قطر متوازی‌الاضلاع ساخته‌شده روی بردارهای قرمز بالا هستیم. چون طول این دو بردار برابر و بر هم عمود هستند، متوازی‌الاضلاعی که روی آن‌ها می‌سازیم؛ طبق شکل بالا یک مربع است که طول هر دو قطرش طبق قضیه فیثاغورس در مثلث رنگی بالا می‌شود:

مشاوره متأسفانه این سؤال خارج از کتاب درسی است؛ چون کتاب درسی فقط به بردارهای یک مختصات (همان $\vec{i}$, $\vec{j}$ و $\vec{k}$) پرداخته و بردار یک را در حالت کلی بررسی نکرده است.

سمت راست تساوی‌های (۱) و (۲) برابرند، پس سمت چپشان هم باید برابر باشند:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC} \quad (*)$$

خوب که به تناسب (*) و مثلث ADC نگاه کنید؛ می‌فهمید تناسب مربوط به نیمساز داخلی، در آن برقرار است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم بگوییم DF نیمساز داخلی مثلث ADC است.

گام ۲ (محاسبه طول AF و FC) در مثلث رنگی DF نیمساز است، پس طبق مورد (۱) درس‌نامه می‌توانیم تناسب زیر را بنویسیم:

$$\frac{AF}{FC} = \frac{AD}{DC} \Rightarrow \frac{AF}{FC} = \frac{3}{5} \xrightarrow{\text{مورد (۴) درس‌نامه}} AF = 3k, FC = 5k$$

حالا برای محاسبه k، طول AC را مساوی ۷ می‌گذاریم:

$$AC = 7 \Rightarrow 3k + 5k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{8}$$

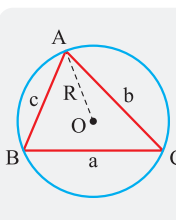
گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال) حالا به کمک فرمول درس‌نامه، طول نیمساز DF در مثلث رنگی بالا را به دست می‌آوریم:

$$DF^2 = AD \times DC - AF \times FC \Rightarrow DF^2 = (5 \times 3) - (3k)(5k) \Rightarrow DF^2 = 15 - 15k^2 \Rightarrow DF^2 = 15(1 - k^2)$$

$$k = \frac{7}{8} \text{ بود، پس: } DF^2 = 15(1 - (\frac{7}{8})^2) = 15 \times (1 - \frac{49}{64}) = \frac{15 \times 15}{64} \Rightarrow DF = \sqrt{\frac{15 \times 15}{64}} = \frac{15}{8}$$

۳۱ - گزینه ۱

درس نامه ۱ قضیه سینوس‌ها می‌گوید در همه مثلث‌ها، نسبت طول هر ضلع به سینوس زاویه مقابلش، مساوی قطر دایره محیطی مثلث است؛ یعنی برای مثلث ABC در شکل مقابل می‌توانیم بنویسیم:



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

شعاع دایره محیطی

۲ مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی 360° است.

گام ۱ (تحلیل شکل مسئله) فرض می‌کنیم در چهارضلعی مقابل، $\hat{A} = \beta$ باشد. طبق مورد (۲) درس‌نامه مجموع زوایای داخلی این چهارضلعی 360° است:

$$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} + \hat{D} = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \beta + 105^\circ + \alpha + (30^\circ + 135^\circ) = 360^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha + \beta = 360^\circ - 270^\circ = 90^\circ \quad (۱)$$

به گفته سؤال $\frac{AB}{BC} = \frac{2}{3}$ است، پس می‌توانیم روی شکل بنویسیم:

$$AB = 2k, BC = 3k$$

گام ۲ (تشخیص استراتژی حل) در مثلث‌های ABD و BDC اطلاعات خوبی راجع به زاویه‌ها و اضلاع رو به آن‌ها را داریم، پس بهترین کار نوشتن قضیه سینوس‌ها در این مثلث‌ها است.

$$\Delta ABD: \frac{\sin \beta}{BD} = \frac{\sin 30^\circ}{2k}$$

$$\Delta BDC: \frac{\sin \alpha}{BD} = \frac{\sin 135^\circ}{3k}$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال) حالا طرفین تساوی‌های بالا را به هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{\sin 135^\circ}{\sin 30^\circ} \Rightarrow \frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{2 \sin 135^\circ}{3 \sin 30^\circ} = \frac{2(\frac{\sqrt{2}}{2})}{3(\frac{1}{2})} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \quad (*)$$

طبق رابطه (۱)، α و β متمم هم‌اند و می‌توانیم به جای $\sin \beta$ در (*) بنویسیم:

$$\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} = \frac{2\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \tan \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\diamond A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\diamond A^3 = A^2 \times A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

حالا A ، A^2 و A^3 را کنار هم ببینید:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, A^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}, A^3 = \begin{bmatrix} 4 & 0 & -4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

می بینید که در هر مرحله درایه های آبی ثابت می ماند و درایه های قرمز دو برابر می شوند، پس برای رسیدن به A^5 باید درایه های قرمز A را در « $2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$ » ضرب کنیم:

$$A^5 = \begin{bmatrix} 16 & 0 & -16 \\ 0 & 1 & 0 \\ -16 & 0 & 16 \end{bmatrix}$$

پس درایه سطر سوم و ستون اول A^5 برابر ۱۶- است.

۳۶- گزینه ۲

درس نامه ۱ هر نقطه ای روی سهمی باشد، فاصله اش از کانون و خط هادی به یک اندازه است.

مثلاً برای نقطه M در شکل روبه رو می توانیم بنویسیم: $MF = MH$ روی سهمی است

۲ اگر در معادله سهمی y^2 داشته باشیم، سهمی افقی و اگر x^2 داشته باشیم، سهمی قائم است.

۳ در معادله گسترده سهمی، اگر نسبت به متغیر درجه دوم مشتق بگیریم یا به عرض رأس می رسمیم یا

به طولش. چه طور بفهمیم کدام؟ در جواب باید بگوییم اگر متغیر درجه دوم x بود به طول رأس ولی اگر y بود به عرض رأس می رسمیم.

۴ برای پیدا کردن مقدار a از روی معادله گسترده از رابطه زیر استفاده می کنیم:

$$a = -\frac{\text{ضرب متغیر درجه اول}}{\text{ضرب متغیر درجه ۲}}$$

۵ در سهمی:

♦ اگر $a > 0$ باشد، دهانه یا رو به بالا است یا رو به راست.

♦ اگر $a < 0$ باشد، دهانه یا رو به پایین است یا رو به چپ.

گام ۱ (پیدا کردن مختصات رأس و مقدار a) طبق مورد (۲) درس نامه، اگر از معادله

$$y^2 + 2x + 3y + 2 = 0$$

$$2y + 3 = 0 \Rightarrow y = -\frac{3}{2}$$

حالا $y = -\frac{3}{2}$ را در معادله سهمی جای گذاری می کنیم تا طول رأس هم پیدا شود:

$$\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + 2x + 3\left(-\frac{3}{2}\right) + 2 = 0 \Rightarrow 2x = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} - 2 = \frac{9}{4} - 2 \Rightarrow 2x = \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

پس مختصات رأس می شود: $S\left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2}\right)$

مقدار a هم که به کمک مورد (۴) درس نامه راحت پیدا می شود:

$$a = -\frac{\text{ضرب متغیر درجه ۲}}{\text{ضرب متغیر درجه ۱}} = -\frac{1}{4 \times 1} = -\frac{1}{4}$$

گام ۲ (پیدا کردن کانون و خط هادی) در معادله سهمی y^2 داریم و $a < 0$

شد، پس دهانه سهمی باید مثل شکل مقابل رو به راست باشد. طبق شکل

اگر از رأس به اندازه « $|a| = \frac{1}{4}$ » واحد به سمت راست برویم به خط هادی و

اگر به همان اندازه به سمت چپ برویم به کانون سهمی می رسمیم:

$$\diamond S\left(\frac{1}{8}, -\frac{3}{2}\right) \xrightarrow[\text{راست می رویم}]{\frac{1}{4} \text{ واحد به سمت چپ}} x = \frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{5}{8}$$

۳۴- گزینه ۴

درس نامه ۱ دترمینان چند ماتریس خاص را به کمک جدول زیر، خیلی سریع

حساب کنید:

$A = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$ یا $B = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$ یا $C = \begin{bmatrix} a & \circ & \circ \\ \circ & b & \circ \\ \circ & \circ & c \end{bmatrix}$	ماتریس خاص
$ A = B = C = abc$ ضرب درایه های قطر اصلی	دترمینان
$D = \begin{bmatrix} \circ & \circ & a \\ \circ & b & \circ \\ c & \circ & \circ \end{bmatrix}$ یا $E = \begin{bmatrix} \circ & \circ & a \\ \circ & b & \circ \\ c & \circ & \circ \end{bmatrix}$ یا $F = \begin{bmatrix} \circ & \circ & a \\ \circ & b & \circ \\ c & \circ & \circ \end{bmatrix}$	ماتریس خاص
$ D = E = F = -abc$ قرینه ضرب درایه های قطر فرعی	دترمینان

۲ دترمینان برای ضرب ماتریس های مربعی جدا می شود، یعنی برای سه ماتریس مربعی و هم مرتبه A ، B و C می توانیم بنویسیم:

$$|ABC| = |A| |B| |C|$$

۳ توان از دترمینان خارج می شود، یعنی:

$$|A^n| = |A|^n$$

گام ۱ (تحلیل خواسته سؤال) به دنبال $M = |(AB)^2|$ هستیم. اول توان را طبق مورد (۳) درس نامه، از دترمینان بیرون می آوریم:

حالا به کمک مورد (۲) درس نامه، دترمینان را برای ضرب جدا جدا می نویسیم:

$$M = (|A| |B|)^2 = |A|^2 |B|^2 \quad (*)$$

گام ۲ (محاسبه $|A|$ و $|B|$) به کمک مورد (۱) درس نامه، $|A|$ و $|B|$ را سریع

حساب می کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} -2 & \circ & \circ \\ \circ & -3 & \circ \\ 5 & \circ & -1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (-2)(-3)(-1) = -6$$

$$B = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & \circ & 1 \\ \circ & -\frac{1}{3} & \circ \\ \circ & \circ & -5 \end{bmatrix} \Rightarrow |B| = \left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)(-5) = -\frac{5}{6}$$

گام ۳ (محاسبه خواسته سؤال) موارد بالا را در (*) جای گذاری می کنیم:

$$M = (-6)^2 \left(-\frac{5}{6}\right)^2 = 36 \times \frac{25}{36} = 25$$

۳۵- گزینه ۱

گام ۱ (محاسبه A) $A = B \times C = \begin{bmatrix} 1 & \circ \\ \circ & 1 \\ -1 & \circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \circ & -1 \\ \circ & 1 & \circ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \circ & -1 \\ \circ & 1 & \circ \\ -1 & \circ & 1 \end{bmatrix}$

گام ۲ (تشخیص الگوی درایه ها و محاسبه خواسته سؤال) A^5 توان بزرگی است، پس احتمالاً

درایه های A^2 و A^3 و... الگوی مشخصی دارند. بیایید ببینیم از روی A^2 و A^3 می توانیم الگوی

پیدا کنیم:

۳۹- گزینه ۳

درس نامه در مسائل اصل لانه کبوتری وقتی می‌خواهیم مطمئن باشیم اتفاق خاصی رخ می‌دهد، بدترین حالت ممکن را در نظر می‌گیریم و تا آخرین نفس با سؤال لج می‌کنیم.

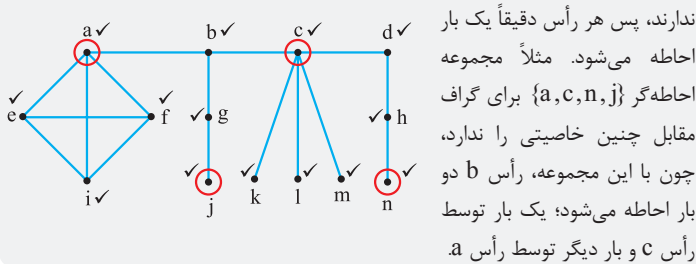
گام ۱ به گفته سؤال در ۵۲ کارت به تعداد مساوی از ۴ رنگ قرمز، سبز، زرد و آبی داریم، پس از هر رنگ « $\frac{52}{4} = 13$ » کارت داریم.

گام ۲ سؤال به دنبال این است که حداقل ۶ کارت قرمز یا حداقل ۴ کارت سبز یا حداقل ۳ کارت زرد و یا حداقل ۲ کارت آبی بیرون بیاوریم؛ پس بدترین حالت ممکن بیرون آوردن « $5 = 6 - 1$ » کارت قرمز، « $3 = 4 - 1$ » کارت سبز، « $2 = 3 - 1$ » کارت زرد، « $1 = 2 - 1$ » کارت آبی است.

گام ۳ تا این جا « $5 + 3 + 2 + 1 = 11$ » کارت بیرون آورده‌ایم ولی به خواسته مسئله نرسیده‌ایم. اما به محض این که کارت بعدی را برداریم، یکی از حداقل‌های سؤال برآورده می‌شود. مثلاً اگر کارت ۱۲م آبی باشد، ۲ کارت آبی خواهیم داشت. بنابراین باید حداقل ۱۲ کارت بیرون بیاوریم.

۴۰- گزینه ۱

شفاف سازی «همسایگی‌های بسته عضوهای مجموعه احاطه‌گر، یک افراز برای مجموعه رئوس این گراف‌اند»؛ طبق تعریف افراز یعنی هیچ کدام از همسایگی‌ها عضو مشترک ندارند، پس هر رأس دقیقاً یک بار



درس نامه ۱ فرض کنید $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$ زیرمجموعه‌های مجموعه A باشند به طوری که:

هیچ کدام از زیرمجموعه‌ها تهی نباشند؛ یعنی:

هیچ دو زیرمجموعه‌های عضو مشترک نداشته باشند؛ یعنی:

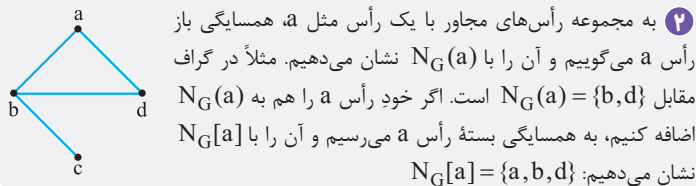
$\forall i, j (i \neq j; A_i \cap A_j = \emptyset)$

اجتماع تمام زیرمجموعه‌ها برابر با A باشد؛ یعنی:

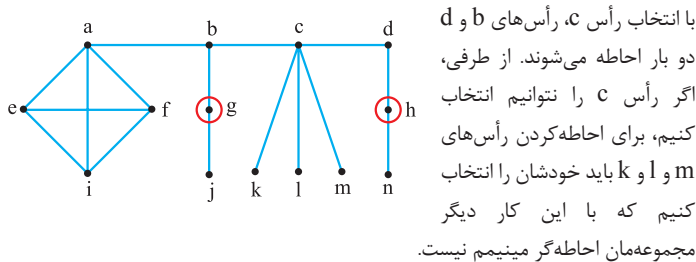
با برقراری سه شرط بالا می‌توانیم بگوییم مجموعه A به n زیرمجموعه $A_1, A_2, \dots, A_n$ افراز شده است.

مثلاً مجموعه‌های زیر یک افراز برای $A = \{1, 2, 3, 4\}$ محسوب می‌شوند:

$A_1 = \{1, 2\}$, $A_2 = \{3\}$, $A_3 = \{4\}$



۲ به مجموعه رأس‌های مجاور با یک رأس مثل a همسایگی باز رأس a می‌گوییم و آن را با $N_G(a)$ نشان می‌دهیم. مثلاً در گراف مقابل $N_G(a) = \{b, d\}$ است. اگر خود رأس a را هم به $N_G(a)$ اضافه کنیم، به همسایگی بسته رأس a می‌رسیم و آن را با $N_G[a] = \{a, b, d\}$ نشان می‌دهیم:



مطابق شکل رأس‌های b و d احاطه می‌شوند و دیگر حق نداریم رأس c را انتخاب کنیم، چون با انتخاب رأس c ، رأس‌های b و d دو بار احاطه می‌شوند. از طرفی، اگر رأس c را نتوانیم انتخاب کنیم، برای احاطه کردن رأس‌های m و l باید خودشان را انتخاب کنیم که با این کار دیگر مجموعه‌مان احاطه‌گر مینیمم نیست.

$$\diamond S\left(\frac{1}{\lambda}, -\frac{3}{\lambda}\right) \xrightarrow[\text{چپ می‌رویم}]{\text{واحد به سمت}} F\left(\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda}, -\frac{3}{\lambda}\right) = \left(-\frac{2}{\lambda}, -\frac{3}{\lambda}\right)$$

گام ۱ (محاسبه α) به گفته سؤال نقطه $A(\alpha, \beta)$ طبق شکل مقابل، روی سهمی قرار دارد و فاصله‌اش از کانون برابر $\frac{2}{5}$ است؛ پس طبق مورد (۱) درس‌نامه، فاصله این نقطه از خط هادی هم باید برابر $\frac{2}{5}$ باشد:

$$\begin{aligned} AH = \frac{2}{5} = \frac{\beta}{\lambda} &\Rightarrow \left| \alpha - \frac{\beta}{\lambda} \right| = \frac{\beta}{\lambda} \\ \Rightarrow \alpha - \frac{\beta}{\lambda} &= \pm \frac{\beta}{\lambda} \Rightarrow \alpha = \frac{\beta}{\lambda} \pm \frac{\beta}{\lambda} \\ \Rightarrow \alpha &= \frac{2\beta}{\lambda} \text{ یا } -\frac{\beta}{\lambda} \end{aligned}$$

این جا باید حواسمان باشد که طبق شکل بالا، نقطه A سمت چپ خط هادی $x = \frac{\beta}{\lambda}$ قرار دارد، پس باید $\alpha < \frac{\beta}{\lambda}$ باشد، در نتیجه $\alpha = -\frac{\beta}{\lambda}$ را می‌پذیریم.

گام ۲ (محاسبه خواسته سؤال) حالا برای محاسبه مقادیر β ، فاصله $A(\alpha, \beta)$ از $F\left(-\frac{2}{\lambda}, -\frac{3}{\lambda}\right)$ را مساوی $\frac{2}{5}$ یا $\frac{\beta}{\lambda}$ می‌گذاریم:

$$\sqrt{\left(\alpha + \frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\beta + \frac{3}{\lambda}\right)^2} = \frac{\beta}{\lambda} \xrightarrow{\alpha = -\frac{\beta}{\lambda}} \sqrt{\left(-\frac{\beta}{\lambda} + \frac{2}{\lambda}\right)^2 + \left(\beta + \frac{3}{\lambda}\right)^2} = \frac{\beta}{\lambda}$$

$$\begin{aligned} \xrightarrow{\text{توان}} \frac{9}{\lambda^2} + \left(\beta + \frac{3}{\lambda}\right)^2 &= \frac{\beta^2}{\lambda^2} \Rightarrow \left(\beta + \frac{3}{\lambda}\right)^2 = \frac{\beta^2}{\lambda^2} - \frac{9}{\lambda^2} = 4 \\ \xrightarrow{\sqrt{\quad}} \beta + \frac{3}{\lambda} &= \pm 2 \Rightarrow \beta = -\frac{3}{\lambda} \pm 2 \Rightarrow \beta = -3/5, 0/5 \\ \text{بنابراین اختلاف مقادیر } \beta &\text{ می‌شود } 4. \end{aligned}$$

۳۷- گزینه ۲

گام ۱ به گفته سؤال n عددی زوج است، پس $n+1$ عددی فرد می‌شود. از طرفی $m \mid (n+1)$ ، یعنی m یک عدد فرد را می‌شمارد، پس خود m هم باید عددی فرد باشد.

گام ۲ m عددی فرد شد، پس $m+2$ هم فرد می‌شود. از طرفی $k \mid (m+2)$ ، پس k هم باید عددی فرد باشد.

گام ۳ حالا نکته زیر را بخوانید:

نکته مربع هر عدد فرد را می‌توانیم به فرم $8q+1$ بنویسیم.

m و k فرد هستند، پس طبق نکته بالا می‌توانیم بنویسیم: $m^2 = 8q'+1$, $k^2 = 8q''+1$ پس $m^2 + k^2 + 3 = 8(q'+q'') + 5 = 8q'' + 5$ می‌شود: بنابراین باقی‌مانده تقسیم $m^2 + k^2 + 3$ بر ۸ برابر ۵ است.

تیزبازی n عددی زوج است؛ پس بیایید آن را ۲ در نظر بگیریم: $m \mid n+1 \xrightarrow{n=2} m \mid 3 \Rightarrow m = \pm 1, \pm 3$ فرض می‌کنیم $m = 3$ باشد، در این صورت:

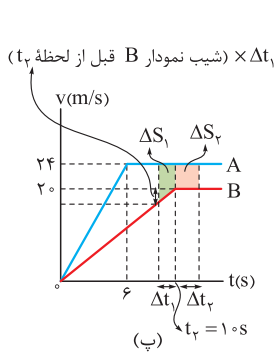
$k \mid m+2 \xrightarrow{m=3} k \mid 5 \Rightarrow k = \pm 1, \pm 5$ پس می‌توانیم k را ۱ در نظر بگیریم. به ازای $m = 3$ و $k = 1$ می‌شود $1^2 + 3^2 + 3 = 13$ که باقی‌مانده‌اش به ۸ می‌شود ۵.

۳۸- گزینه ۴

گام ۱ اگر اتاق‌ها یکسان نباشند، تعداد راه‌های امکان دادن ۸ دانشجو در ۴ اتاق دونفره می‌شود:

گام ۲ ولی به گفته سؤال ۴ اتاق یکسان داریم که هر ۴! جایگشتشان، ۱ حالت به حساب می‌آید، پس برای رسیدن به جواب، عدد بالا را بر ۴! تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{\binom{8}{2} \binom{6}{2} \binom{4}{2} \binom{2}{2}}{4!} = \frac{\frac{8 \times 7}{2} \times \frac{6 \times 5}{2} \times \frac{4 \times 3}{2} \times \frac{2 \times 1}{2}}{4!} = \frac{7 \times 15 \times 6}{4 \times 3 \times 2 \times 1} = 7 \times 15 = 105$$



گام ۱ شکل (پ) را ببینید. فرض می‌کنیم متحرک A، Δt_1 ثانیه قبل از لحظه t_p ، $12m$ متر عقب‌تر از سه متحرک B و Δt_2 ثانیه بعد از لحظه t_p ، $12m$ متر جلوتر از متحرک B باشد؛ بنابراین در شکل (پ) مساحت‌های ΔS_1 و ΔS_2 باید برابر 12 واحد باشند:

$$\Delta S_2 = 12 \Rightarrow (24 - 20) \Delta t_2 = 12$$

$$\Rightarrow \Delta t_2 = \frac{12}{4} = 3s$$

شیب نمودار B قبل از لحظه $t_p = 10s$

$$\Delta S_1 = 12 \Rightarrow \frac{(24 - 20) + (24 - 20 + \frac{20}{1} \Delta t_1)}{2} \times \Delta t_1 = 12$$

$$\Rightarrow (4 + \Delta t_1) \Delta t_1 = 12 \Rightarrow \Delta t_1 = 2s$$

بنابراین مجموعاً $\Delta t_1 + \Delta t_2 = 5s$ فاصله دو متحرک کمتر یا مساوی 12 متر است.

۴۹ - گزینه ۲

درس‌نامه با داشتن تغییرات سرعت و جرم جسم، می‌توانیم نیروی خالص وارد بر جسم را به صورت مقابل محاسبه کنیم.

$$F_{net} = ma \xrightarrow{a = \frac{\Delta v}{\Delta t}} F_{net} = \frac{m \Delta v}{\Delta t}$$

در هنگام ترمز کامیون یا خودرو، اندازه نیروی خالص وارد بر آن‌ها برابر نیروی اصطکاک است؛ پس داریم:

$$\frac{F_{net} \text{ کامیون}}{F_{net} \text{ خودرو}} = \frac{\frac{m_{\text{کامیون}} \Delta v_{\text{کامیون}}}{\Delta t}}{\frac{m_{\text{خودرو}} \Delta v_{\text{خودرو}}}{\Delta t}}$$

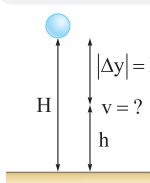
$$\xrightarrow{F_{net} = -f_k} \frac{-f_k \text{ کامیون}}{-f_k \text{ خودرو}} = \frac{m_{\text{کامیون}} \times \Delta v_{\text{کامیون}}}{m_{\text{خودرو}} \times \Delta v_{\text{خودرو}}}$$

$$\frac{m_{\text{کامیون}} = 18000 \text{ kg}, \Delta v_{\text{کامیون}} = 0 - 20 = -20 \text{ m/s}}{m_{\text{خودرو}} = 1600 \text{ kg}, \Delta v_{\text{خودرو}} = 0 - \frac{108}{3.6} = -30 \text{ m/s}} \rightarrow \frac{f_k \text{ کامیون}}{f_k \text{ خودرو}} = \frac{18000 \times (-20)}{1600 \times (-30)} = 7/5$$

۵۰ - گزینه ۱

درس‌نامه تکانه جسم در هر لحظه برابر حاصل ضرب جرم جسم در سرعت آن است:

$$p = mv$$



گام ۱ با توجه به شکل روبه‌رو، به کمک رابطه مستقل از زمان، اندازه سرعت گلوله در ارتفاع h را حساب می‌کنیم.

$$v^2 - v_0^2 = -2g\Delta y \xrightarrow{v_0 = 0} |v^2 - 0| = 2g|\Delta y|$$

$$\xrightarrow{|\Delta y| = H - h} |v| = \sqrt{2g(H - h)}$$

گام ۲ بزرگی تکانه برابر می‌شود با:

$$|p| = m|v| = m\sqrt{2g(H - h)}$$

۵۱ - گزینه ۴

درس‌نامه شتاب مرکزگرا بسته به داده‌های مسئله با یکی از رابطه‌های زیر محاسبه می‌شود:

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

(الف) اگر شعاع مسیر (r) و تندی متحرک (v) را داشته باشیم:

$$a_c = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$$

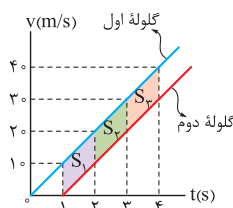
(ب) اگر شعاع مسیر (r) و دوره چرخش (T) را داشته باشیم:

$$a_c = \frac{2\pi v}{T}$$

(پ) اگر تندی متحرک (v) و دوره چرخش (T) را داشته باشیم:

$$T = \frac{\Delta t}{\text{تعداد دور}} = \frac{60s}{120} = \frac{1}{2}s$$

گام ۱ دوره چرخش پره‌های بالگرد برابر است با:

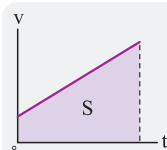


روش نمودار سرعت - زمان دو گلوله مطابق شکل روبه‌رو است. فاصله دو گلوله از هم در هر ثانیه به اندازه مساحت‌های S_1 یا S_2 افزایش می‌یابد؛ پس کافی است مساحت متوازی‌الاضلاع S_1 را حساب کنیم:

$$S_1 = 10 \times 1 = 10m$$

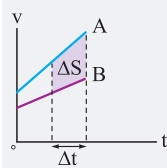
۴۸ - گزینه ۲

شفاف‌سازی در مبدأ زمان، متحرک A، $68m$ از متحرک B عقب‌تر بوده است، اما با توجه به نمودار، در تمام لحظه‌ها سرعت متحرک A از متحرک B بیشتر است؛ بنابراین متحرک A به تدریج به متحرک B نزدیک می‌شود و در یک لحظه‌ای مانند t' از متحرک B سبقت می‌گیرد. پس ما باید این لحظه t' را پیدا کنیم و بعد ببینیم در چه لحظه‌ای متحرک A، $12m$ عقب‌تر از متحرک B و در چه لحظه‌ای $12m$ جلوتر از متحرک B است.



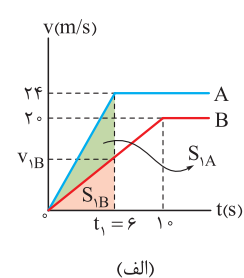
درس‌نامه ۱ در حرکت بر مسیر مستقیم، مساحت زیر نمودار سرعت - زمان معادل جابه‌جایی متحرک است؛ مثلاً برای شکل روبه‌رو داریم:

$$S = \Delta x$$



۲ با داشتن نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B، جابه‌جایی دو متحرک نسبت به هم در بازه زمانی Δt معادل اختلاف سطح زیر نمودارهای آن‌ها در این بازه است. در شکل روبه‌رو، جابه‌جایی متحرک A نسبت به متحرک B در بازه Δt برابر می‌شود با:

$$\Delta x_A - \Delta x_B = \Delta S$$



گام ۱ برای شروع، با توجه به شکل (الف)، وضعیت دو متحرک را در لحظه $t_1 = 6s$ پیدا می‌کنیم. اگر مکان اولیه متحرک A را صفر در نظر بگیریم، داریم:

$$\Delta x_{(0,6)A} = S_{1A} = \frac{6 \times 24}{2} = 72m$$

$$\Rightarrow x_{6A} - x_{0A} = 72$$

$$\xrightarrow{x_{0A} = 0} x_{6A} = 72m$$

برای محاسبه جابه‌جایی متحرک B در بازه زمانی صفر تا $6s$ ، باید سرعت این متحرک در لحظه $t_1 = 6s$ (یعنی v_{1B}) را حساب کنیم، با توجه به نمودار B در شکل (الف) داریم:

$$\frac{v_{1B}}{20} = \frac{6}{10} \Rightarrow v_{1B} = 12m/s$$

مکان اولیه متحرک B برابر $x_{0B} = 68m$ است، مکان آن را در لحظه $t_1 = 6s$ به دست می‌آوریم:

$$\Delta x_{(0,6)B} = S_{1B} = \frac{6 \times 12}{2} = 36m \Rightarrow x_{6B} - x_{0B} = 36$$

$$\xrightarrow{x_{0B} = 68m} x_{6B} - 68 = 36 \Rightarrow x_{6B} = 68 + 36 = 104m$$

با مقایسه $x_{6A} = 72m$ و $x_{6B} = 104m$ می‌فهمیم که تا لحظه $t_1 = 6s$ هنوز متحرک A به متحرک B نرسیده است.

گام ۲ حالا مثل گام اول به کمک شکل (ب) وضعیت دو متحرک را در لحظه $t_p = 10s$ پیدا می‌کنیم:

$$\Delta x_{(0,10)A} = S_{2A} = \frac{10 + (10 - 6)}{2} \times 24 = 168m$$

$$\Rightarrow x_{10A} - x_{0A} = 168 \xrightarrow{x_{0A} = 0} x_{10A} = 168m$$

$$\Delta x_{(0,10)B} = S_{2B} = \frac{20 \times 10}{2} = 100m$$

$$\Rightarrow x_{10B} - x_{0B} = 100$$

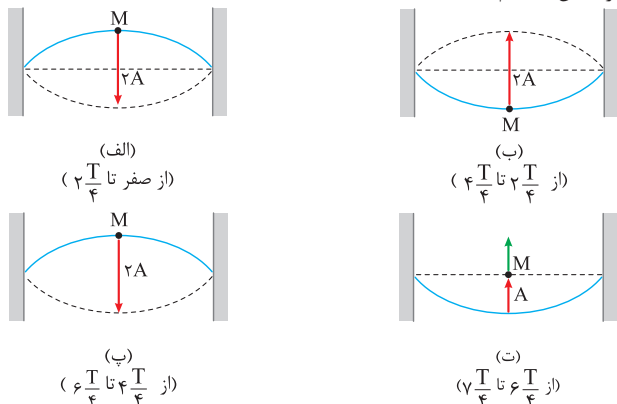
$$\xrightarrow{x_{0B} = 68m} x_{10B} - 68 = 100 \Rightarrow x_{10B} = 100 + 68 = 168m$$

طراح سؤال، ما را در لحظه $t_p = 10s$ سورپرایز کرد! دو متحرک در این لحظه در یک مکان $(x_{10A} = x_{10B} = 168m)$ قرار دارند.

گزینه ۱ - ۵۴

درس نامه در هر ربع دوره $(\frac{T}{4})$ ، هر نقطه از تار مسافتی برابر دامنه نوسانش (A) را می‌پیماید. مثلاً در شکل روبه‌رو ذره M در $\frac{T}{4}$ اول از A به نقطه O و در $\frac{T}{4}$ دوم از O به -A و در $\frac{T}{4}$ سوم از -A به O و ... می‌رود.

با توجه به این که $T = \frac{1}{f}$ است، $t = \frac{v}{4f}$ برابر می‌شود با: $t = \frac{v}{4f} \xrightarrow{T = \frac{1}{f}} t = \frac{v}{4f} T$ بنابراین ذره M از تار مسافت $4A$ را طی می‌کند. در شکل‌های زیر، از الف تا ت، مسیر حرکت تار را نشان داده‌ایم.



گزینه ۲ - ۵۵

درس نامه اگر شدت یک صوت در فاصله d_1 از چشمه صوت I_1 و در فاصله d_2 از آن I_2 باشد، رابطه تغییرات تراز شدت صوت را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\Delta\beta = 10 \log \frac{I_2}{I_1} \xrightarrow{\frac{I_r}{I_1} = \left(\frac{d_1}{d_r}\right)^2} \Delta\beta = 10 \log \left(\frac{d_1}{d_r}\right)^2 = 20 \log \frac{d_1}{d_r}$$

در یک گام: $\Delta\beta = 20 \log \frac{d_1}{d_r} \xrightarrow{\frac{d_1}{d_r} = \frac{1}{2}} \Delta\beta = 20 \log \frac{1}{2} = -20 \log 2 = -20 \times 0.3 = -6 \text{ dB}$ بنابراین با ۲ برابر شدن فاصله از چشمه صوت، تراز شدت صوت ۶ dB کاهش می‌یابد.

گزینه ۴ - ۵۶

درس نامه معادله ریذبرگ: طول موج خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن، از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right), (n > n')$$

ثابت ریذبرگ (10^7 nm^{-1})

در رابطه بالا، طول موج بر حسب نانومتر است. **گام** گذارهای ممکن با شرط $\Delta n = 1$ به صورت زیر است:

$n=4 \Rightarrow n'=3$ و $n=3 \Rightarrow n'=2$ و $n=2 \Rightarrow n'=1$

(رشته لیمان) (رشته بالمر) (رشته پاشن)

گام کوتاه‌ترین طول موج مربوط به گذار الکترون از تراز ۲ به تراز ۱ است؛ پس طبق معادله ریذبرگ داریم:

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n'^2} \right) = 10^7 \times \left(\frac{1}{1^2} - \frac{1}{2^2} \right) = \frac{1}{100} \left(\frac{3}{4} \right) \Rightarrow \lambda = \frac{400}{3} \text{ nm}$$

گزینه ۲ - ۵۷

درس نامه در اثر فوتوالکتریک، بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترن‌های گسیل شده از فلز از رابطه مقابل به دست می‌آید:

تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی در خلأ ثابت پلانک

بیشینه تندی الکترون جدا شده

تابع کار فلز

طول موج

جرم الکترون

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 = \frac{hc}{\lambda} - W_0 \rightarrow$$

گام چون شتاب در وسط پره را می‌خواهیم، شعاع مسیر را برابر نصف طول پره (یعنی $r=2 \text{ m}$) در نظر می‌گیریم و با داشتن T و r از رابطه $a = \frac{4\pi^2 r}{T^2}$ ، به جواب می‌رسیم:

$$a = \frac{4\pi^2 r}{T^2} = \frac{4 \times 10 \times 2}{\left(\frac{1}{10}\right)^2} = 4000 \times 4 \times 10 \times 2 = 32000 \text{ m/s}^2$$

گزینه ۳ - ۵۲

نکته عددی که نیروسنج نشان می‌دهد، برابر اندازه نیرویی است که نیروسنج به وزنه وارد می‌کند.

گام مطابق شکل روبه‌رو چه در حالت سکون و چه در حال حرکت، دو نیرو به وزنه وارد می‌شود؛ یکی نیروی وزن (mg) که رو به پایین است و دیگری نیرویی که نیروسنج به وزنه وارد می‌کند ($\vec{F}_e$) که رو به بالا است. در حالت سکون، وزنه در حال تعادل است و داریم:

$$F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow mg - F_e = 0 \Rightarrow F_e = mg = 8$$

$$g = 10 \text{ m/s}^2 \rightarrow \lambda = 10 \text{ m} \Rightarrow m = 0.8 \text{ kg}$$

گام برای حالتی که آسانسور با شتاب رو به پایین $2/5 \text{ m/s}^2$ حرکت می‌کند، داریم: (چون شتاب رو به پایین است، $\vec{F}_{\text{net}}$ را به صورت «نیروی رو به بالا - نیروی رو به پایین = F_{net} » می‌نویسیم.)

$$F_{\text{net}} = ma \xrightarrow{F_{\text{net}} = mg - F'_e} mg - F'_e = ma$$

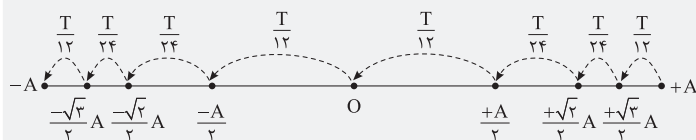
$$\xrightarrow{mg = 8 \text{ N}, a = 2/5 \text{ m/s}^2} 8 - F'_e = 0.8 \times 2/5 \Rightarrow F'_e = 8 - 0.32 = 7.68 \text{ N}$$

تیزبازی چون شتاب رو به پایین است، نیرویی که نیروسنج نشان می‌دهد از وزن جسم کم‌تر است و از رابطه $F'_e = m(g - a)$ حساب می‌شود:

$$F'_e = 0.8 \times (10 - 2/5) = 0.8 \times 9.6 = 7.68 \text{ N}$$

گزینه ۳ - ۵۳

درس نامه می‌دانید برای محاسبه تندی متوسط در بازه زمانی معین، باید نسبت مسافتی را که متحرک در آن بازه پیموده است، به بازه زمانی حساب کنیم. در حرکت نوسانی ساده برای محاسبه مسافت طی شده از الگوی زیر استفاده می‌کنیم.



گام بازه $t_0 = 0 \text{ s}$ تا $t_1 = \frac{5}{3} \text{ s}$ را بر حسب دوره (T) می‌نویسیم:

$$\frac{\Delta t}{T} = \frac{5/3}{2} = \frac{5}{6} \Rightarrow \Delta t = \frac{5}{6} T = \frac{5}{6} \times \left(\frac{T}{6} \times 6 \right)$$

گام در شکل روبه‌رو، مسیر حرکت نوسانگر در مدت $\frac{\Delta t}{6}$ را نشان داده‌ایم.

با توجه به شکل، مسافتی که متحرک در این مدت می‌پیماید برابر است با:

$$\ell = 2A + 3 \frac{A}{2} = \frac{7A}{2}$$

$$A = \frac{d}{2} = \frac{1}{2} \times 4 \text{ cm} = 2 \text{ cm} \rightarrow \ell = \frac{7 \times 4}{2} = 14 \text{ cm}$$

گام محاسبه تندی متوسط:

$$s_{\text{av}} = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t = \frac{5}{6} T} s_{\text{av}} = \frac{14}{5/6} = 16.8 \text{ cm/s}$$



روش گام ۱ میدان الکتریکی بار q_1 در محل بار q_2 را محاسبه می‌کنیم:

$$E_1 = \frac{F}{|q_2|} \Rightarrow E = \frac{2 \times 10^{-2}}{5 \times 10^{-6}} = 4 \times 10^3 \text{ N/C}$$

مقدار فوق، اندازه میدان الکتریکی بار q_1 در فاصله 6 cm از آن است.

گام ۲ حالا باید اندازه میدان الکتریکی را در فاصله 2 cm از بار q_1 محاسبه کنیم:

$$E' = \frac{k|q_1|}{r'^2} \xrightarrow{\text{تغییر فاصله}} \frac{E'}{E} = \left(\frac{r}{r'}\right)^2 = \left(\frac{6}{2}\right)^2 = 9 \Rightarrow E' = 9E$$

$$\Rightarrow E' = 9 \times 4 \times 10^3 = 3.6 \times 10^4 \text{ N/C}$$

روش گام ۲ با استفاده از قانون کولن، q_1 را محاسبه می‌کنیم:

$$F = \frac{k|q_1||q_2|}{r^2} \xrightarrow{\text{تکنیک محاسباتی}} 2 \times 10^{-2} = 9 \times \frac{|q_1| \times 5 \times 10^{-6}}{6^2}$$

$$\Rightarrow |q_1| = \frac{72}{9 \times 5} = 0.16 \mu\text{C}$$

گام ۳ حالا می‌توانیم میدان الکتریکی بار q_1 را در فاصله 2 cm از آن محاسبه کنیم:

$$E' = \frac{k|q_1|}{r'^2} = \frac{9 \times 10^9 \times 0.16 \times 10^{-6}}{(2 \times 10^{-2})^2} = 3.6 \times 10^4 \text{ N/C}$$

۶۱- گزینه ۴

درس نامه ۱ ظرفیت خازن تختی که با دی الکتریکی با ثابت κ کاملاً پر شده

$$C = \kappa \epsilon_0 \frac{A}{d} \rightarrow \text{مساحت هر یک از صفحه‌های خازن} \quad \text{فاصله بین صفحه‌های خازن}$$

ثابت دی الکتریک

$$(\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12} \text{ F/m}) \quad \text{ضریب گذردهی الکتریکی (خالی)}$$

۲ انرژی ذخیره شده در خازنی به ظرفیت C ، که اختلاف پتانسیل بین صفحه‌های آن V

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \quad \text{است، از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:}$$

گام ۱ اگر انرژی اولیه خازن را 100 واحد فرض کنیم، پس از 8 درصد افزایش انرژی (معادل 8 واحد افزایش)، انرژی ثانویه خازن برابر با 108 واحد خواهد بود:

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{108}{100} = \frac{27}{25}$$

نکته اختلاف پتانسیل (V) خازنی که به باتری متصل است، در هر شرایطی ثابت باقی می‌ماند.

گام ۲ چون V ثابت مانده است، با استفاده از رابطه $U = \frac{1}{2} CV^2$ می‌توان نوشت:

$$U = \frac{1}{2} CV^2 \Rightarrow \frac{U_2}{U_1} = \frac{C_2}{C_1} = \frac{27}{25}$$

گام ۳ حالا به کمک رابطه ظرفیت خازن، خواسته طراح را به دست می‌آوریم:

$$C = \frac{\kappa \epsilon_0 A}{d} \xrightarrow{\text{فقط } d \text{ عوض شده}} \frac{C_2}{C_1} = \frac{d_1}{d_2} \Rightarrow \frac{27}{25} = \frac{2}{d_2} \Rightarrow d_2 = \frac{2}{27} \text{ mm}$$

$$\Rightarrow d_2 = 2/27 \text{ mm} \Rightarrow \Delta d = d_2 - d_1 = 2/27 - 2/25 = -0.2 \text{ mm}$$

در نتیجه، فاصله باید 0.2 mm کاهش یابد.

۶۲- گزینه ۱

درس نامه قانون کولن: دو بار نقطه‌ای q_1 و q_2 که در فاصله r از یکدیگر قرار دارند،

به هم نیروی الکتریکی وارد می‌کنند که اندازه آن از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$F = k \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \text{ ثابت کولن})$$

تکنیک محاسباتی ۱، چون در بیشتر تست‌های این مبحث، بارها را برحسب میکروکولن و فاصله‌ها را برحسب سانتی‌متر می‌دهند، می‌توانید در رابطه بالا، کمیت‌ها را با همین یکپایه جای‌گذاری کرده و به جای k ، 9×10^9 را قرار دهید تا F برحسب نیوتون به دست آید:

$$F = 9 \times 10^9 \times \frac{|q_1||q_2|}{r^2} \rightarrow \text{برحسب cm}$$

الکترون ولت (eV): یکای متداول انرژی در فیزیکی اتمی و هسته‌ای است و تبدیل eV به J و برعکس به صورت روبه‌رو انجام می‌شود:

$$1 \text{ eV} \xleftrightarrow{\times (1.6 \times 10^{-19})} 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

گام ۱ بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکتردها را محاسبه می‌کنیم:

$$K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0 = \frac{1240}{248} - 4/55 = 0.45 \text{ eV}$$

بیشینه انرژی جنبشی را به ژول تبدیل می‌کنیم:

$$K_{\max} = 0.45 \times 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

گام ۲ به کمک رابطه انرژی جنبشی، تندی بیشینه را محاسبه می‌کنیم:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m_e v_{\max}^2 \Rightarrow 0.45 \times 1.6 \times 10^{-19} = \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-31} \times v_{\max}^2$$

$$\Rightarrow v_{\max} = 1.6 \times 10^6 \Rightarrow v_{\max} = 4 \times 10^5 \text{ m/s}$$

۵۸- گزینه ۱

درس نامه نوترون‌های آزاد شده در فرایند شکافت ایزوتوپ $^{235}_{92}\text{U}$ ، انرژی جنبشی

زیادی دارند (به طور متوسط حدود 2 MeV) و به نوترون‌های تند معروف‌اند. این نوترون‌ها،

با احتمال بسیار بیشتری جذب ایزوتوپ $^{238}_{92}\text{U}$ می‌شوند. تجربه نشان می‌دهد اگر بتوان

نوترون‌های تند را به نحوی کند ساخت که انرژی جنبشی آن‌ها به حدود 0.4 eV یا کمتر از آن

برسد، احتمال جذب آن‌ها توسط ایزوتوپ‌های $^{235}_{92}\text{U}$ افزایش می‌یابد. آب معمولی (H_2O)،

آب سنگین (D_2O) و گرافیت (اتم‌های کربن) از جمله موادی هستند که به عنوان کندساز

نوترون‌ها در واکنش‌های شکافت هسته‌ای استفاده می‌شوند.

همان‌طور که در درس‌نامه گفتیم، آب معمولی (H_2O)، آب سنگین (D_2O) و گرافیت

به عنوان کندساز نوترون در واکنش‌های شکافت هسته‌ای استفاده می‌شوند.

۵۹- گزینه ۲

استراتژی در فرایندهای واپاشی، عدد جرمی و عدد اتمی قبل از فرایند را به ترتیب

برابر با مجموع عدد جرمی‌ها و مجموع عدد اتمی‌ها پس از فرایند قرار دهید. با این روش

می‌توانید عدد جرمی و عدد اتمی هسته دختر را پیدا کنید.

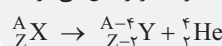
درس نامه ۱ تعداد نوترون‌های هسته، برابر با اختلاف عدد جرمی و عدد اتمی

آن است:

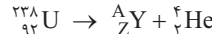
$$N = A - Z \quad \begin{matrix} \text{عدد جرمی} \\ \text{عدد اتمی} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \text{تعداد پروتون‌ها} \\ \text{تعداد نوترون‌ها} \end{matrix}$$

۲ واپاشی α : پرتوهای α ، ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیم (^4_2He) هستند و

از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند. فرایند واپاشی آلفا (α) با رابطه زیر بیان می‌شود:



گام ۱ فرایند واپاشی را می‌نویسیم: (هسته دختر را با $^A_Z Y$ نشان می‌دهیم).



تعداد نوکلئون‌ها قبل از فرایند را با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند برابر قرار می‌دهیم:

$$\left. \begin{aligned} 238 &= A + 4 \Rightarrow A = 234 \\ 92 &= Z + 2 \Rightarrow Z = 90 \end{aligned} \right\} \Rightarrow ^{234}_{90} \text{Y}$$

گام ۲ تعداد نوترون‌ها را به دست می‌آوریم و سپس اختلاف آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} N &= 238 - 92 = 146 \\ N' &= 234 - 90 = 144 \end{aligned} \right\} \Rightarrow N' - N = 144 - 146 = -2$$

۶۰- گزینه ۳

درس نامه ۱ اگر به بار الکتریکی q ، نیروی الکتریکی F وارد شود، اندازه میدان

الکتریکی در محل این بار از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$E = \frac{F}{|q|} \quad \text{اندازه میدان الکتریکی در فاصله } r \text{ از بار نقطه‌ای } q \text{ از رابطه زیر به دست می‌آید:}$$

$$E = k \frac{|q|}{r^2} \quad (k = 9 \times 10^9 \frac{\text{N.m}^2}{\text{C}^2} \text{ ثابت کولن})$$

۶۴ - گزینه ۴

درس نامه ۱ وقتی n مقاومت مشابه R ، به طور موازی به یکدیگر متصل باشند،

مقاومت معادل آن‌ها از رابطه $R_{eq} = \frac{R}{n}$ محاسبه می‌شود.

۲ در هر مداری، توان خروجی باتری، برابر با توان مصرفی در مقاومت معادل متصل به آن باتری است.

۳ اگر اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R برابر با V باشد، توان مصرفی این مقاومت از رابطه روبه‌رو به دست می‌آید:

$$P = \frac{V^2}{R}$$

گام ۱ دو مقاومت یکسان R_1 و R_2 موازی‌اند، در نتیجه

مقاومت معادل آن‌ها برابر $R_{12} = \frac{R}{2}$ است.

حالا می‌توانیم مقاومت معادل کل مجموعه در حالت اول را محاسبه کنیم:

$$R_{eq(1)} = R_1 + R_{12} = R + \frac{R}{2} = \frac{3}{2}R$$

گام ۲ هر سه مقاومت موازی‌اند، در نتیجه مقاومت معادل در حالت دوم برابر با

$$R_{eq(2)} = \frac{R}{3} \text{ می‌باشد.}$$

گام ۳ در هر دو حالت فوق، مقاومت معادل به دو سر باتری با ولتاژ ثابت $V = \mathcal{E}$ ،

متصل‌اند، در نتیجه با استفاده از رابطه $P = \frac{V^2}{R}$ می‌توان نوشت:

$$P_{\text{خروجی}} = P_{eq} = \frac{V^2}{R_{eq}} \xrightarrow{V: \text{ثابت}} \frac{P_{\text{خروجی}}}{P_1} = \frac{R_{eq(1)}}{R_{eq(2)}} \\ \Rightarrow \frac{P_{\text{خروجی}}}{\frac{9}{4}} = \frac{\frac{3}{2}R}{\frac{R}{3}} = \frac{9}{2} \Rightarrow P_{\text{خروجی}} = 4 \times \frac{9}{2} = 18 \text{ W}$$

۶۵ - گزینه ۳

شفاف‌سازی در این جانمایی مغناطیسی وارد بر پروتون، نیروی مرکزگرا را تأمین می‌کند.

درس نامه ۱ اندازه نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی

از رابطه $F_B = |q|vB\sin\alpha$ محاسبه می‌شود. در این رابطه $|q|$ بزرگی بار ذره، v تندی ذره، B بزرگی میدان مغناطیسی و α زاویه بین بردار میدان و بردار سرعت است.

۲ در حرکت دایره‌ای یکنواخت، بین تندی (v)، شعاع مسیر (r) و نیروی مرکزگرای وارد بر جسم به جرم m رابطه مقابل برقرار است:

$$F_c = \frac{mv^2}{r}$$

نکته برای آن‌که حرکت ذره باردار در میدان

مغناطیسی دایره‌ای یکنواخت شود، همانند شکل روبه‌رو،

باید بردار سرعت ($\vec{v}$) بر بردار میدان مغناطیسی ($\vec{B}$)

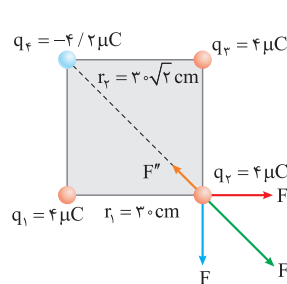
عمود باشد، یعنی $\alpha = 90^\circ$.

نیروی مغناطیسی وارد بر پروتون را برابر نیروی مرکزگرا قرار می‌دهیم:

$$F_B = F_c \Rightarrow |q|vB\sin\alpha = \frac{mv^2}{r} \Rightarrow v = \frac{r|q|B\sin\alpha}{m}$$

$$\xrightarrow{r=16/7 \times 10^{-2} \text{ cm}, |q|=e=1/6 \times 10^{-19} \text{ C}, B=5 \times 10^{-2} \text{ T}, \alpha=90^\circ, m=1/6 \times 10^{-27} \text{ kg}}$$

$$v = \frac{16/7 \times 10^{-2} \times 1/6 \times 10^{-19} \times 5 \times 10^{-2} \times 1}{1/6 \times 10^{-27}} = 8 \times 10^5 \text{ m/s}$$



$$F' = \sqrt{F^2 + F^2} = \sqrt{2}F = \sqrt{2} \times 1/6 = 2/24 \text{ N}$$

گام ۱ نیروی برابندی که بارهای

q_1 و q_2 بر بار q_3 وارد می‌کنند را محاسبه می‌کنیم:

$$q_1 = q_2 = q_3 = q$$

$$F = F_1 = F_2 = \frac{k|q|^2}{r_1^2} = \frac{9 \times 4 \times 4}{3^2}$$

$$\Rightarrow F = 1/6 \text{ N}$$

گام ۲

یادآوری طول قطر مربع، $\sqrt{2}$ برابر طول ضلع آن است.

نیروی جاذبه بین بارهای q_1 و q_4 را محاسبه می‌کنیم:

$$F'' = \frac{k|q_1||q_4|}{r_2^2} \xrightarrow{\text{تکنیک محاسباتی } 90^\circ} F'' = \frac{9 \times 4 \times 4/2}{(3\sqrt{2})^2} = 0/84 \text{ N}$$

گام ۳ نیروهای $\vec{F}$ و $\vec{F}'$ در خلاف جهت یکدیگرند، در نتیجه نیروی الکتریکی خالص

وارد بر بار q_3 برابر است با:

$$F_{\text{net}} = F' - F'' = 2/24 - 0/84 = 1/4 \text{ N}$$

۶۳ - گزینه ۳

درس نامه ۱ مطابق شکل مقابل، دو مقاومت R_1 و

R_2 به صورت متوالی (سری) به هم متصل‌اند:

مقاومت معادل این دو مقاومت:

۲ مطابق شکل زیر، دو مقاومت R_1 و R_2 به صورت موازی

به هم متصل‌اند:

مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

۳ جریان کل عبوری از مدار (جریان عبوری از باتری) در

شکل روبه‌رو از رابطه مقابل به دست می‌آید:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_{eq} + r}$$

۴ اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R که جریان عبوری از آن I است:

$$V = RI$$

گام ۱ برای درک بهتر مدار این تست، مطابق شکل، گره‌ها را نام‌گذاری کرده و مدار را دوباره رسم می‌کنیم:

اختلاف پتانسیل دو سر مقاومت R که جریان عبوری از آن I است:

مقاومت‌های R_1 و R_2 با یکدیگر موازی بوده و مجموعه این دو مقاومت با R_3 متوالی است:

مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{12} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{24 \times 12}{24 + 12} = 8 \Omega$$

طبق شکل مقابل مشخص است که مجموعه

مقاومت‌های R_1 ، R_2 و R_3 به طور مستقیم به دو سر

باتری متصل‌اند، در نتیجه جریان عبوری از این شاخه

برابر است با:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{24}{16 + 8} = 1 \text{ A}$$

$$V_1 = V_2 = V_3 = R_3 \times I = 8 \times 1 = 8 \text{ V}$$

مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{12} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{24 \times 12}{24 + 12} = 8 \Omega$$

مقاومت معادل این دو مقاومت:

$$R_{12} = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2} = \frac{24 \times 12}{24 + 12} = 8 \Omega$$

طبق شکل مقابل مشخص است که مجموعه

مقاومت‌های R_1 ، R_2 و R_3 به طور مستقیم به دو سر

باتری متصل‌اند، در نتیجه جریان عبوری از این شاخه

برابر است با:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{24}{16 + 8} = 1 \text{ A}$$

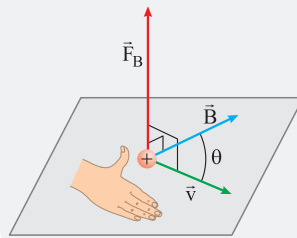
$$V_1 = V_2 = V_3 = R_3 \times I = 8 \times 1 = 8 \text{ V}$$

۶۶- گزینه ۲



درس نامه قاعده دست راست برای تعیین

جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک، طبق این قاعده، اگر چهار انگشت باز دست راست را طوری در جهت بردار سرعت ذره ($\vec{v}$) قرار دهیم که بردار میدان مغناطیسی ($\vec{B}$) از کف دست خارج شود، شست دست، جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره با بار مثبت را نشان می‌دهد. (شکل مقابل را ببینید.)



نکته اگر بار ذره منفی باشد، این قاعده را با دست چپ اجرا می‌کنیم:

علامت بار ذره	جهت نیروی مغناطیسی وارد بر ذره
مثبت	قاعده دست راست
منفی	قاعده دست راست را با دست چپ اجرا می‌کنیم.

همان‌طور که در شکل درس‌نامه مشخص است، بردار $\vec{F}_B$ الزاماً بر بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{B}$ عمود است، ولی زاویه بین بردارهای $\vec{v}$ و $\vec{B}$ می‌تواند هر مقدار دلخواهی داشته باشد. بر این اساس، فقط شکل (ب) می‌تواند از نظر فیزیکی قابل قبول باشد (در شکل (الف)، $\vec{F}_B$ بر $\vec{v}$ و در شکل (ج)، $\vec{F}_B$ بر $\vec{B}$ عمود نیست).

۶۷- گزینه ۳



درس نامه قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، برای تغییر شار مغناطیسی عبوری از

یک مدار بسته، نیروی محرکه‌ای در آن القا می‌شود. نیروی محرکه القایی متوسط در این مدار از رابطه مقابل محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t}$$

نیم‌خط عمود بر سطح حلقه
تعداد حلقه‌ها
مساحت حلقه
بزرگی میدان مغناطیسی

$$\Phi = BA \cos\theta \rightarrow \varepsilon_{av} = -NBA \frac{(\cos\theta_f - \cos\theta_i)}{\Delta t}$$

فقط زاویه θ تغییر کند.

با توجه به شکل‌های (الف) و (ب)، زاویه θ در حالت اول برابر 0° و در حالت دوم برابر 60° است. به کمک قانون القای الکترومغناطیسی فاراده می‌توان نوشت:

$$|\varepsilon_{av}| = \left| -NBA \frac{(\cos\theta_f - \cos\theta_i)}{\Delta t} \right|$$

$$\frac{A = 40 \text{ cm}^2 = 40 \times 10^{-4} \text{ m}^2}{\theta_i = 0^\circ, \theta_f = 60^\circ} \rightarrow$$

$$|\varepsilon_{av}| = \left| -20 \times 10^{-4} \times 25 \times 40 \times 10^{-4} \times \frac{(\cos 60^\circ - \cos 0^\circ)}{0.2} \right| = 5 \text{ V}$$



۶۸- گزینه ۴

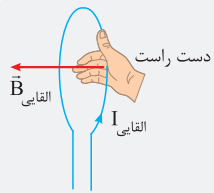


درس نامه ۱ قانون لنز، با تغییر شار مغناطیسی عبوری از یک حلقه (یا پیچ) با

سیم‌لوله، میدان مغناطیسی القایی در داخل حلقه به وجود می‌آید که جهت آن طبق جدول زیر تعیین می‌شود:

جهت تغییر شار مغناطیسی	جهت میدان مغناطیسی القایی
افزایش	در خلاف جهت میدان مغناطیسی اصلی
کاهش	هم‌جهت با میدان مغناطیسی اصلی

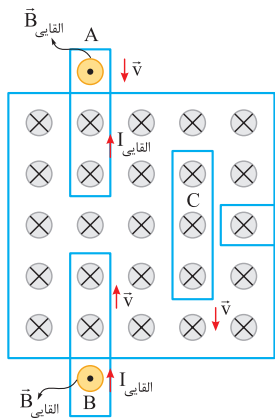
۲ قاعده دست راست برای تعیین جهت جریان القایی، اگر چهار انگشت دست راست را در جهت میدان مغناطیسی در داخل حلقه قرار دهیم، شست دست جهت جریان القایی در حلقه را نشان می‌دهد (شکل مقابل):



حلقه‌های A و B در حال ورود به ناحیه میدان مغناطیسی اند؛ بنابراین شار مغناطیسی عبوری از آن‌ها در حال افزایش و در نتیجه برای این دو حلقه میدان مغناطیسی القایی در خلاف جهت میدان مغناطیسی اصلی است.

حلقه C هم درون میدان مغناطیسی یکنواخت در حال حرکت است، پس شار مغناطیسی آن تغییر نمی‌کند و جریانی در آن القا نمی‌شود.

حلقه D هم در حال خروج از ناحیه میدان مغناطیسی است؛ بنابراین شار مغناطیسی عبوری از آن‌ها در حال کاهش و در نتیجه برای این حلقه میدان مغناطیسی القایی هم‌جهت با میدان مغناطیسی اصلی است. با این توضیحات، مطابق شکل مقابل به کمک قاعده دست راست، جریان القایی در حلقه‌های A و B پادساعتگرد و در حلقه C ساعتگرد است.



۶۹- گزینه ۲



$$\rho = \frac{m}{V} \rightarrow \text{جرم} \rightarrow \text{حجم}$$

درس نامه چگالی:

چگالی کل قطعه جواهر، مجموع حجم طلا و نقره است، پس:

$$V_{\text{کل}} = V_{\text{طلا}} + V_{\text{نقره}} \rightarrow \rho = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{\rho} \rightarrow V_{\text{کل}} = \frac{m_{\text{طلا}}}{\rho_{\text{طلا}}} + \frac{m_{\text{نقره}}}{\rho_{\text{نقره}}}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{m_{\text{طلا}}}{19} + \frac{m_{\text{نقره}}}{10} \quad (I)$$

چگالی کل قطعه جواهر، مجموع جرم طلا و نقره است، در نتیجه:

$$m_{\text{کل}} = m_{\text{طلا}} + m_{\text{نقره}} \Rightarrow m_{\text{طلا}} = m_{\text{کل}} - m_{\text{نقره}} = 68 - m_{\text{نقره}}$$

$$\xrightarrow{\text{جایگذاری در رابطه (I)}} \Delta = \frac{68 - m_{\text{نقره}}}{19} + \frac{m_{\text{نقره}}}{10}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{10 \times (68 - m_{\text{نقره}}) + 19 m_{\text{نقره}}}{19 \times 10} \Rightarrow \Delta \times 19 \times 10 = 680 - 10 m_{\text{نقره}} + 19 m_{\text{نقره}}$$

$$\Rightarrow 9 m_{\text{نقره}} = 270 \Rightarrow m_{\text{نقره}} = 30 \text{ g}$$

۷۰- گزینه ۱



درس نامه ۱ وقتی جسمی با شتاب a رو به پایین حرکت می‌کند، وزن ظاهری آن

به mg' می‌رسد. بر این اساس فشار پیمانه‌ای جسم نیز $\rho g'h$ خواهد بود.

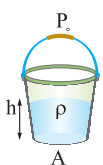
۲ برای جسمی که در شرایط خلأ (مقاومت هوا ناچیز) سقوط آزاد می‌کند، $a = g$ است و وزن ظاهری جسم به صفر می‌رسد.

فشار در کف سطل (P_A) ناشی از مایعی به چگالی ρ و ارتفاع h که در محیطی با فشار P_0 با شتاب a رو به پایین می‌آید، برابر است با:

$$P_A = P_0 + \rho g'h \xrightarrow{g' = g - a} P_A = P_0 + \rho(g - a)h$$

از طرفی چون مقاومت هوا ناچیز است و سطل سقوط آزاد می‌کند، داریم $(a = g)$:

$$P_A = P_0 + \rho(g - g)h \Rightarrow P_A = P_0$$



۷۱- گزینه ۴

درسنامه اصل هم‌فشاری نقاط هم‌تراز: در نقطه‌های هم‌تراز (هم‌عمق) یک مایع ساکن، فشار یکسان است و به شکل ظرف بستگی ندارد. برای مثال در شکل مقابل، نقاط A و B هم‌ترازند و درون یک مایع ساکن قرار دارند؛ بنابراین فشار این دو نقطه با هم برابر است.

$$P_A = P_B \Rightarrow P_0 + \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = P_0 + \rho_2 g h_2$$

$$\Rightarrow \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 = \rho_2 h_2$$

♦ توجه داشته باشید که در این رابطه فقط یکسان بودن یکاها در دو طرف تساوی مهم است.

در شکل مقابل فشار در نقاط هم‌تراز A و B یکسان است؛ پس:

$$P_A = P_B \Rightarrow \rho_1 g h_1 + \rho_2 g h_2 = \rho_2 g h_2$$

$$\Rightarrow \rho_1 h_1 + \rho_2 h_2 = \rho_2 h_2$$

$$\frac{\rho_2 = 2\rho_1, h_2 = 30 \text{ cm}}{h_1 = 20 \text{ cm}, h_2 = 30 - 20 = 10 \text{ cm}} \rightarrow \rho_1 \times 20 + 2\rho_1 \times 10 = \rho_2 \times 30$$

$$\Rightarrow 40\rho_1 = 30\rho_2 \Rightarrow \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{4}{3}$$

۷۲- گزینه ۳

درسنامه انرژی جنبشی جسمی به جرم m و به تندی v از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \rightarrow \text{تندی (m/s)}$$

$$\downarrow$$

$$\text{جرم (kg)}$$

گام تغییرات تندی و انرژی جنبشی اتومبیل به صورت زیر است:

$$v_2 = v_1 + 6 \text{ (m/s)}$$

$$K_2 = K_1 + 1/69 K_1 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = 1/69$$

گام از رابطه نسبتی انرژی جنبشی داریم:

$$K = \frac{1}{2} m v^2 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{v_2}{v_1}\right)^2 \xrightarrow{\frac{K_2}{K_1} = 1/69} 1/69 = \left(\frac{v+6}{v}\right)^2$$

$$\sqrt{\quad} \rightarrow 1/3 = \frac{v+6}{v} \Rightarrow 1/3v = v+6 \Rightarrow 0/3v = 6 \Rightarrow v = 20 \text{ m/s}$$

$$v = 20 \times 3/6 = 10 \text{ km/h}$$

۷۳- گزینه ۲

درسنامه اگر دو جسم به جرم‌های m_1 و m_2 و دماهای θ_1 و θ_2 و گرمای ویژه c_1 و c_2 با هم تبادل گرمایی داشته باشند؛ به شرط آن‌که تغییر حالت رخ ندهد، دمای تعادل آن‌ها (θ_e) مستقیماً از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$\theta_e = \frac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2}{m_1 c_1 + m_2 c_2} \quad \text{اگر دو جسم همجنس باشند} \quad c_1 = c_2 \rightarrow \theta_e = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2}$$

گام در حالت اول، جرم آب با دمای 40°C را حساب می‌کنیم:

$$\theta_e = \frac{m_1 \theta_1 + m_2 \theta_2}{m_1 + m_2} \quad \theta_e = 50^\circ\text{C}, \theta_1 = 40^\circ\text{C} \rightarrow 50 = \frac{m_1 \times 40 + 1 \times 80}{m_1 + 1}$$

$$\Rightarrow 50 m_1 + 50 = 40 m_1 + 80 \Rightarrow 10 m_1 = 30 \Rightarrow m_1 = 3 \text{ kg}$$

گام اکنون ۴ کیلوگرم آب با دمای 50°C داریم.

اگر آن را با یک کیلوگرم آب 80°C مخلوط کنیم، به دمای تعادل θ'_e خواهند رسید:

$$\theta'_e = \frac{(m_1 + m_2)\theta_e + m_2\theta_2}{(m_1 + m_2) + m_2} \quad \frac{m_1 + m_2 = 4 \text{ kg}, \theta_e = 50^\circ\text{C}}{m_2 = 1 \text{ kg}, \theta_2 = 80^\circ\text{C}} \rightarrow \theta'_e = \frac{4 \times 50 + 1 \times 80}{4 + 1}$$

$$\Rightarrow \theta'_e = \frac{280}{5} = 56^\circ\text{C}$$

۷۴- گزینه ۳

درسنامه ۱ معادله قانون گازهای کامل به صورت زیر است:

ثابت جهانی گازها $\left(\frac{\text{J}}{\text{mol.K}}\right)$ حجم (m^3)

دما برحسب کلوین $\rightarrow PV = nRT$ ← فشار مطلق (Pa)

تعدادمول (mol)

$$T = \theta + 273^\circ$$

دما $(^\circ\text{C})$

★ **نکته** در قانون گازهای کامل از فشار مطلق استفاده می‌کنیم که برابر است با مجموع فشار پیمانه‌ای گاز (P_g) و فشار هوای محیط (P_0).

۲) تعداد مول‌های یک گاز، از تقسیم جرم گاز (m) بر جرم مولی آن (M) به دست می‌آید:

$$n = \frac{m}{M}$$

گام رابطه قانون گازهای کامل را می‌نویسیم و با استفاده از آن، تعداد مول‌های گاز را حساب می‌کنیم:

$$PV = nRT$$

$$\frac{P = P_g + P_0, P_0 = 2 \times 10^5 \text{ Pa}, V = 16 \text{ L} = 16 \times 10^{-3} \text{ m}^3}{R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}, T = 47 + 273 = 320 \text{ K}} \rightarrow 2 \times 10^5 \times 16 \times 10^{-3}$$

$$= n \times 8 \times 320 \Rightarrow 3200 = n \times 8 \times 320 \Rightarrow n = \frac{5}{4} \text{ mol}$$

گام با توجه به این که جرم مولی گاز معلوم است، جرم گاز را به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{m}{M} \xrightarrow{\frac{n = 5/4 \text{ mol}}{M = 4 \frac{\text{g}}{\text{mol}}}} \frac{5}{4} = \frac{m}{4} \Rightarrow m = 5 \text{ g}$$

۷۵- گزینه ۱

درسنامه اگر گازی را که در فشار P_1 و حجم V_1 قرار دارد، یک بار به صورت هم‌دما و بار دیگر به صورت بی‌دررو تا حجم V_2 متراکم کنیم، در هر دو فرایند فشار گاز افزایش می‌یابد، اما در فرایند هم‌دما، افزایش فشار کمتر از حالت بی‌دررو است. زیرا در تراکم هم‌دما از گاز گرما گرفته می‌شود تا دمای آن ثابت بماند.

روش با توجه به درس‌نامه، وقتی فشار گاز به صورت بی‌دررو افزایش می‌یابد، حتماً دمای آن افزایش می‌یابد ($\frac{T_2}{T_1} = m > 1$) و (۲) و (۳) رد می‌شوند. همچنین حجم آن کاهش می‌یابد ($\frac{V_2}{V_1} = n < 1$) نیز رد می‌شود. به این ترتیب (۱) درست است.

روش در فرایند بی‌دررو با افزایش فشار گاز، حجم کاهش و دما افزایش می‌یابد ($T_2 > T_1$).

$$\uparrow T = \frac{\uparrow PV}{nR} \xrightarrow{\frac{P_2 = 2P_1}{V_2 < V_1}} T_2 < 2T_1$$

$$T_1 < T_2 < 2T_1 \Rightarrow 1 < \frac{T_2}{T_1} < 2 \Rightarrow 1 < m < 2$$

بنابراین می‌توان نوشت:

گام

$$T_1 < T_2 < 2T_1 \Rightarrow P_1 V_1 < P_2 V_2 < 2P_1 V_1 \xrightarrow{P_2 = 2P_1} V_1 < 2V_2 < 2V_1$$

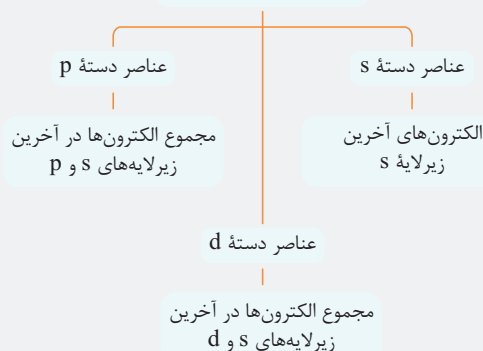
$$\Rightarrow \frac{1}{2} V_1 < V_2 < V_1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{V_2}{V_1} < 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < n < 1$$

شیمی

۷۶- گزینه ۲

نکته تعیین الکترون‌های ظرفیت عناصر دسته‌های s, p, d و جدول تناوبی

تعیین الکترون‌های ظرفیتی



آرایش الکترونی عناصر $_{21}X$ و $_{21}A$ به صورت زیر است:

$$_{21}A: 1s^2 / 2s^2 2p^6 / 3s^2 3p^6 3d^1 / 4s^2 \Rightarrow (n=3) \text{ سوم لایه } = 9 \text{ شمار الکترون‌های لایه سوم}$$

$$_{21}X: [_{18}Ar] 3d^1 / 4s^2 \Rightarrow \text{شمار الکترون‌های ظرفیت} = 3$$

$$\frac{\text{شمار الکترون‌های لایه سوم در } _{21}A}{\text{شمار الکترون‌های ظرفیت در } _{21}X} = \frac{9}{3} = 3$$

۷۷- گزینه ۴

نکته آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم عناصر اصلی (عناصرهای دسته‌های s و p) جدول دوره‌ای، به صورت زیر است (در این عناصر، تعداد الکترون‌های ظرفیت با عدد یکان شماره گروه برابر می‌باشد، البته به‌جز اتم هلیم):

شماره گروه	۱۸		۱۷	۱۶	۱۵	۱۴	۱۳	۱۲	۱۱	۱۰	۹	۸	۷	۶	۵	۴	۳	۲	۱
	بقیه عناصر	He	He	He	He	He	He	He	He	He	He	He	He	He	He	He	He	He	He
آرایش الکترون - نقطه‌ای	$\cdot\cdot\cdot$	$He: \cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$	$\cdot\cdot\cdot$

در آرایش الکترون - نقطه‌ای عناصر گروه ۱۸ برخلاف سایر گروه‌های جدول تناوبی، الکترون منفرد (تک) وجود ندارد.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) در ترکیب‌های یونی دوتایی دارای هالوژن، یون هالید به آرایش گاز نجیب می‌رسد، ولی ممکن است کاتیون این ترکیب به آرایش گاز نجیب نرسد. مثلاً در ترکیب یونی دوتایی $FeCl_2$ ، کاتیون Fe^{2+} به آرایش هیچ گاز نجیبی نرسیده است. ۲) استفاده از واژه «فرمول مولکولی» برای ترکیبات یونی کاملاً غلطه! باید می‌گفت فرمول شیمیایی. ۳) نه کی گفته؟! مثلاً در ترکیب یونی MgO از ۲ یون Mg^{2+} و O^{2-} تشکیل شده، اما قدرمطلق مجموع بارشون برابر با $2+2=4$ است.

۷۸- گزینه ۱

عنصر Z در دوره سوم جای دارد و آرایش الکترونی آخرین زیرلایه آن یکی از حالت‌های $3p^1$ تا $3p^6$ می‌تواند باشد.

اگر شمار الکترون‌های 3d با X با شمار الکترون 3p در Z برابر باشد، تفاوت عدد اتمی این دو عنصر حداقل ۷ و حداکثر ۸ خواهد بود.

$$_{13}Al(3s^2 3p^1) - _{21}Sc(3d^1 / 4s^2) = 8$$

$$_{17}Cl(3s^2 3p^5) - _{24}Cr(3d^5 / 4s^1) = 7$$

$$_{17}Cl(3s^2 3p^5) - _{25}Mn(3d^5 / 4s^2) = 8$$

بررسی سایر گزینه‌ها: ۲) تنها فلز دسته p در دوره سوم، $_{13}Al$ است. اگر Z، $_{13}Al$ باشد، عنصر X همان $_{21}Sc$ خواهد بود که در ترکیب‌های تنها یک نوع عدد اکسایش (+۳) دارد.

نکته مهم‌ترین عنصرهایی که در ترکیب‌های مختلف تنها یک نوع عدد اکسایش دارند، عبارت‌اند از:

عنصر	فلزهای قلیایی (گروه ۱)	فلزهای قلیایی خاکی (گروه ۲)	بور (B) و آلومینیم (Al) (گروه ۱۳)	فلوئور (F) (گروه ۱۷)	اسکاندیم (Sc) (گروه ۳)	روی (Zn) (گروه ۱۰)	نقره (Ag) (گروه ۱۱)
عدد اکسایش	+۱	+۲	+۳	-۱	+۳	+۲	+۱

حواستون باشه که عدد اکسایش هر کدام از این عناصر در حالت آزاد برابر صفر است.

۳) شبه‌فلز دوره سوم $_{14}Si$ است، اگر Z، $_{14}Si$ باشد، همان $_{22}Ti$ خواهد بود که به دلیل واکنش ناچیز با ذره‌های موجود در آب، از آن در ساخت پروانه کشتی‌های اقیانوس‌پیما استفاده می‌شود.

۴) اگر Z، $_{17}Cl$ باشد، X می‌تواند $_{25}Mn$ باشد که هر دو عنصر حداقل یک زیرلایه الکترونی نیمه‌پُر دارند.

مشاوره این سؤال به نمونه از سؤال‌های تحلیلیه! با توجه به این که سهم سؤال‌های تحلیلی در کنکورهای اخیر زیاد شده، بهتون توصیه می‌کنیم که هر جا توی کتاب‌ها، آزمون‌ها و ... این مدل سؤال‌ها رو دیدید، اول دانش خودتون رو محک بزنید و بعدش حتماً پاسخ سؤال رو بخونید تا بتونید مهارتون رو در این مدل تست‌ها بالا ببرید.

۷۹- گزینه ۱

نکته در مسائل مقایسه‌ای مول، برای سرعت و راحتی بیشتر، باید به جای عدد آووگادرو در محاسبات، نماد آن (N_A) را قرار دهید.

گام ۱ برای قسمت اول سؤال ابتدا شمار اتم‌ها در $1/8$ گرم آب را حساب می‌کنیم.

روش ۱ استفاده از کسر تناسب و فرمول:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{تعداد ذره}} = \frac{\text{جرم مولی} \times N_A}{\text{تعداد ذره}} \Rightarrow \frac{1/8}{x} = \frac{18}{3 \times N_A} \Rightarrow x = 0.3 N_A$$

حالا حساب می‌کنیم در چند گرم کربن مونوکسید (CO)، $0.3 N_A$ مولکول وجود دارد.

$$\frac{\text{جرم}}{\text{تعداد ذره}} = \frac{\text{جرم مولی}}{N_A} \Rightarrow \frac{y}{28} = \frac{0.3 N_A}{N_A} \Rightarrow y = 8.4 \text{ g CO}$$

روش ۲ استفاده از کسر تبدیل:

$$1/8 \text{ g H}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol H}_2\text{O}}{18 \text{ g H}_2\text{O}} \times \frac{3 \text{ mol atom}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} \times \frac{N_A \text{ atom}}{1 \text{ mol atom}} = 0.3 N_A \text{ atom}$$

$$0.3 N_A \text{ CO} \times \frac{1 \text{ mol CO}}{N_A \text{ CO}} \times \frac{28 \text{ g CO}}{1 \text{ mol CO}} = 8.4 \text{ g CO}$$

گام ۲ برای قسمت دوم سؤال باید حجم 8.4 گرم گاز CO را در شرایط STP حساب کنیم:

$$8.4 \text{ g CO} \times \frac{1 \text{ mol CO}}{28 \text{ g CO}} \times \frac{22.4 \text{ L CO}}{1 \text{ mol CO}} = 6.72 \text{ L CO}$$

۸۰- گزینه ۳

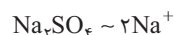
درس‌نامه رسم سریع ساختار لوویس گونه‌ها:

۱) ابتدا شمار کل پیوندهای اشتراکی در یک گونه را با فرمول زیر به دست می‌آوریم:

$$\text{شمار کل پیوندهای اشتراکی} = \left(\text{مجموع تعداد eهای جفت‌نشده} + \text{در آرایش الکترون - نقطه‌ای اتم‌ها} \right) / 2$$

۲) با توجه به نوع اتم‌ها، اتم مرکزی را با پیوندهای یگانه، دوگانه یا سه‌گانه به اتم‌های اطراف متصل می‌کنیم و با گذاشتن جفت الکترون‌های ناپایندی، اتم‌ها (به‌جز H) را هشت‌تایی می‌کنیم.

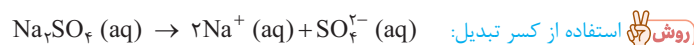
گام ۳ با استفاده از استوکیومتری فرمولی، جرم یون سدیم (Na^+) را در محلول حساب می‌کنیم:



روش: استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{284 \times 10^{-3}}{142} = \frac{x}{2 \times 23}$$

$$\Rightarrow x = 92 \times 10^{-3} = 9/2 \times 10^{-2} \text{ g Na}^+$$



$$284 \times 10^{-3} \text{ g Na}_2\text{SO}_4 \times \frac{1 \text{ mol Na}_2\text{SO}_4}{142 \text{ g Na}_2\text{SO}_4} \times \frac{2 \text{ mol Na}^+}{1 \text{ mol Na}_2\text{SO}_4} \times \frac{23 \text{ g Na}^+}{1 \text{ mol Na}^+} = 92 \times 10^{-3} = 9/2 \times 10^{-2} \text{ g Na}^+$$

۸۳ - گزینه ۱

با توجه به این که در ابتدا حجم دو محلول یکسان بوده (200 mL) و غلظت محلول ستون (۱) دو برابر غلظت محلول ستون (۲) است؛ پس شمار یون‌ها در محلول (۱) بیشتر است. به دلیل پدیده اسمز، مولکول‌های آب از سمت محلول رقیق‌تر (ستون ۲) به سمت محلول غلیظ‌تر (ستون ۱) جابه‌جا می‌شوند و حجم محلول در ستون (۱) افزایش می‌یابد. **مواستون** هست که یون‌ها از غشای نیمه‌تراوا عبور نمی‌کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها: گفتیم که به دلیل فرایند اسمز و جابه‌جایی مولکول‌های آب از سمت محلول رقیق (ستون ۲) به سمت محلول غلیظ (ستون ۱)، ارتفاع محلول در ستون (۲)، کاهش می‌یابد.

غلظت محلول ستون (۱) را پس از وارد شدن 100 mL (50% درصد) حلال از ستون (۲) به ستون (۱) حساب می‌کنیم: (با انتقال 100 میلی‌لیتر آب به ستون (۱)، حجم محلول در ستون (۱) 300 میلی‌لیتر می‌شود).

$$\begin{aligned} \text{محلول رقیق‌شده} \\ \text{ستون (۱)} \\ M_a V_a = M_b V_b \Rightarrow 0.2 \times 200 = M_b \times 300 \\ \text{محلول غلیظ} \\ \text{اولیه ستون (۱)} \\ \Rightarrow M_b = \frac{0.2 \times 200}{300} = \frac{0.4}{3} = 0.13 \text{ mol.L}^{-1} \end{aligned}$$

غلظت محلول ستون (۱) از 0.2 به 0.13 می‌رسد و نصف نمی‌شود.

در محلول‌های ستون (۱) و (۲) به ترتیب 0.08 و 0.04 مول یون وجود دارد:



حجم $\times$ غلظت مولی $= 2 \times \text{مول NaCl} = 2 \times \text{مجموع مول یون‌ها}$

$$\text{محلول ستون (۱)}: 2 \times 0.2 \times 0.13 = 0.052 \text{ mol}$$

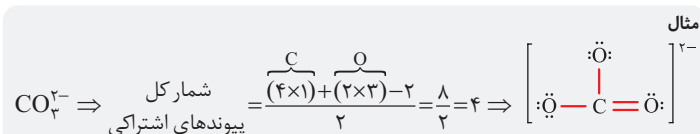
$$\text{محلول ستون (۲)}: 2 \times 0.1 \times 0.04 = 0.008 \text{ mol}$$

فرض کنید در محلول ستون (۱) x مول و در محلول ستون (۲)، y مول آب وجود دارد و به دلیل پدیده اسمز، a مول آب از محلول ستون (۲) به محلول ستون (۱) منتقل می‌شود:

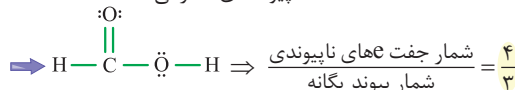
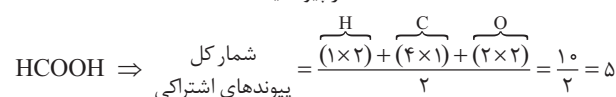
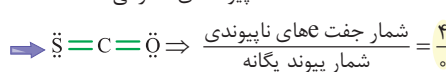
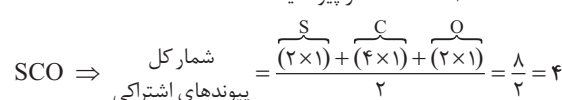
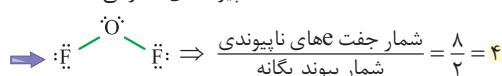
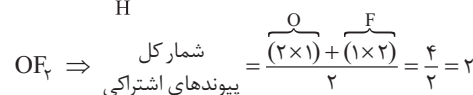
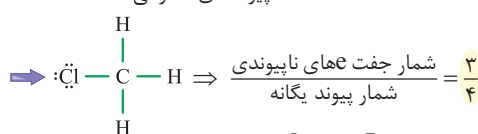
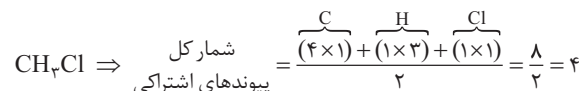
$$\frac{\text{شمار مول آب}}{\text{شمار یون‌ها}} = \frac{\text{شمار مول آب}}{\text{شمار یون‌ها}} \Rightarrow \frac{\text{ستون (۱)}}{\text{ستون (۲)}} = \frac{\frac{x+a}{0.08}}{\frac{y-a}{0.04}} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x+a}{y-a} = \frac{1}{2}$$

برای این که این نسبت برابر با $\frac{1}{2}$ شود، باید $\frac{x+a}{y-a} = \frac{1}{2}$ باشد. باید ببینیم این نسبت برابر ۱ هست یا خیر؟

در این مورد خاص چون نوع محلول در دو سمت غشای نیمه‌تراوا برابر است، فرایند اسمز زمانی به تعادل رسیده و به ظاهر متوقف می‌شود که غلظت ذرات حل‌شونده در دو سمت برابر شوند: غلظت ذرات حل‌شونده در محلول ستون (۱) = غلظت ذرات حل‌شونده در محلول ستون (۲)

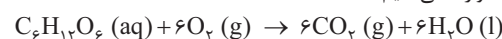


ساختار همهٔ مولکول‌ها را ببینید:



۸۱ - گزینه ۲

گام ۱ معادلهٔ واکنش را موازنه می‌کنیم:



گام ۲ مول CO_2 مصرف‌شده به ازای ۸ درخت در یک سال را حساب می‌کنیم:

$$\frac{2}{11} \times \text{درخت} \times \frac{36 \text{ kg CO}_2}{1 \text{ درخت}} \times \frac{1000 \text{ g}}{1 \text{ kg}} \times \frac{1 \text{ mol CO}_2}{44 \text{ g CO}_2} \approx 7200 \text{ mol CO}_2$$

گام ۳ این مقدار CO_2 از اکسایش گلوکز در بدن فرد طی یک سال (365 روز) حاصل می‌شود. حالا باید حساب کنیم مقدار CO_2 تولیدشده در یک شبانه‌روز از اکسایش چند مول گلوکز در بدن فرد حاصل می‌شود:

$$1 \text{ روز} \times \frac{1 \text{ سال}}{365 \text{ روز}} \times \frac{7200 \text{ mol CO}_2}{1 \text{ سال}} \times \frac{1 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6}{6 \text{ mol CO}_2} \approx 3 \text{ mol C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$$

مشاوره تست‌های استوکیومتری، ارزش سرمایه‌گذاری در هر کنکور رو دارن! هر سال چندتا تست از این مبحث میاد که حداقل دوتا ش مثل این تست بسیار آسونه؛ پس حواستون باشه که این مبحث و تست‌هاشو از دست ندین.

۸۲ - گزینه ۴

استراتژی با توجه به فرمول ppm و داشتن جرم محلول، جرم حل‌شونده (Na_2SO_4) را به دست بیار. از آن‌جا که هر واحد فرمولی Na_2SO_4 پس از انحلال در آب ۲ مول یون Na^+ تولید می‌کند، جرم یون Na^+ را حساب کن.

گام ۱ با استفاده از غلظت ppm، جرم سدیم سولفات (Na_2SO_4) حل‌شده در 2840 گرم محلول را به دست می‌آوریم:

$$\text{ppm} (\text{Na}_2\text{SO}_4) = \frac{\text{جرم Na}_2\text{SO}_4}{\text{جرم محلول}} \times 10^6 \Rightarrow 100 = \frac{x}{2840} \times 10^6 \Rightarrow x = 284 \times 10^{-3} \text{ g}$$

برای قسمت اول سؤال حجم محلول رقیق به دست آمده $250 + 200 = 450$ میلی لیتر است؛ بنابراین خواهیم داشت:

$$M_1 V_1 = M_2 V_2 \Rightarrow 0.1 \times 200 = M_2 \times 250 \Rightarrow M_2 = 0.08 \text{ mol.L}^{-1}$$

غلظت رقیق

$$100 = \frac{\text{غلظت اولیه} - \text{غلظت ثانویه}}{\text{غلظت اولیه}} \times 100$$

$$= \frac{0.08 - 0.1}{0.1} \times 100 = -20\%$$

کاهش

تا این جا ① و ② پُر!

بریم سراغ قسمت دوم سؤال؛

☆ نکته فرمول غلظت معمولی (گرم بر لیتر) و تبدیل آن به غلظت مولار و بالعکس

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جرم حل شونده (گرم)} = \frac{\text{غلظت گرم بر لیتر}}{\text{حجم محلول (L)}} \\ \text{مول حل شونده} = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم مولی}} \\ \text{غلظت مول بر لیتر} = \frac{\text{مول حل شونده}}{\text{حجم محلول (L)}} \end{array} \right.$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی}} = \text{غلظت مولار} = \frac{\text{جرم حل شونده (گرم)}}{\text{حجم محلول (L)} \times \text{جرم مولی}}$$

غلظت گرم بر لیتر

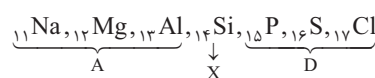
$$\Rightarrow \frac{\text{غلظت گرم بر لیتر}}{\text{جرم مولی}} = \text{غلظت مول بر لیتر (مولار)}$$

غلظت محلول نهایی سدیم هیدروکسید (NaOH) 0.08 مولار است؛ پس داریم:

$$\frac{\text{غلظت گرم بر لیتر}}{\text{جرم مولی}} = \frac{X}{40} \Rightarrow 0.08 = \frac{X}{40} \Rightarrow X = 3.2 \text{ g.L}^{-1}$$

۸۶ - گزینه ۳

می دانیم که در یک دوره با افزایش عدد اتمی شعاع اتمی، عناصر کاهش می یابد. از آن جا که سؤال به متوالی بودن سه عنصر A ، X و D اشاره ای نکرده، طبق اطلاعات داده شده در سؤال اگر X شبه فلز دوره سوم جدول تناوبی یعنی $_{14}\text{Si}$ باشد، A و D می توانند عناصر زیر باشند:



حالا می ریم سراغ بررسی گزینه ها:

① این گزینه غلطه! با افزایش عدد اتمی در یک دوره، خصلت نافلزی عناصر افزایش می یابد، ولی نمی توان گفت واکنش پذیری عناصر همواره افزایش پیدا می کند، زیرا در یک دوره، با افزایش عدد اتمی واکنش پذیری فلزها کاهش و واکنش پذیری نافلزها افزایش می یابد.

② این گزینه هم غلطه! در صورت تست اشاره شده که A ، X و D ، عنصرهای واکنش پذیر دوره سوم هستند، گازهای نجیب که واکنش ناپذیرند یا واکنش پذیری بسیار کمی دارند، پس D نمی تونه گاز نجیب باشه!

③ با توجه به نمودار، اگر اختلاف عدد اتمی دو عنصر D و X را با اختلاف عدد اتمی دو عنصر A و X برابر در نظر بگیریم، این گزینه درسته!

گفتیم که A می تواند $_{13}\text{Al}$ ، $_{12}\text{Mg}$ و $_{11}\text{Na}$ باشد و D می تواند $_{16}\text{S}$ ، $_{15}\text{P}$ و $_{17}\text{Cl}$ باشد؛ بنابراین داریم:

$$\begin{array}{ccc} \text{P} & \text{S} & \text{Cl} \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow \\ \frac{\text{شمار الکترون های ظرفیت D}}{\text{شمار الکترون های ظرفیت X}} = \frac{5}{4} = 1/25 \text{ یا } \frac{6}{4} = 1/5 \text{ یا } \frac{7}{4} = 1/25 \\ \\ \text{Al} & \text{Mg} & \text{Na} \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ \frac{\text{شمار الکترون های ظرفیت X}}{\text{شمار الکترون های ظرفیت A}} = \frac{4}{3} = 1/3 \text{ یا } \frac{4}{2} = 2 \text{ یا } \frac{4}{1} = 4 \end{array}$$

$_{14}\text{Si}$ که اتم $_{14}\text{Si}$ است، حالا همان طور که می بینید اگر D و A به ترتیب $_{15}\text{P}$ و $_{13}\text{Al}$ یا $_{16}\text{S}$ و $_{12}\text{Mg}$ یا $_{17}\text{Cl}$ و $_{11}\text{Na}$ باشند، نسبت شمار الکترون های ظرفیت اتم X به D $(\frac{D}{X})$ کوچک تر از این نسبت در اتم X به A $(\frac{A}{X})$ است.

$$\frac{(2 \times 0.1 / 2 \times 0.1) \text{ mol}}{(y-a) \text{ mol H}_2\text{O} \times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} \times \frac{1 \text{ mL}}{1 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}}}$$

چگالی آب

$$= \frac{(2 \times 0.1 / 2 \times 0.1) \text{ mol}}{(x+a) \text{ mol H}_2\text{O} \times \frac{18 \text{ g H}_2\text{O}}{1 \text{ mol H}_2\text{O}} \times \frac{1 \text{ mL}}{1 \text{ g}} \times \frac{1 \text{ L}}{1000 \text{ mL}}}$$

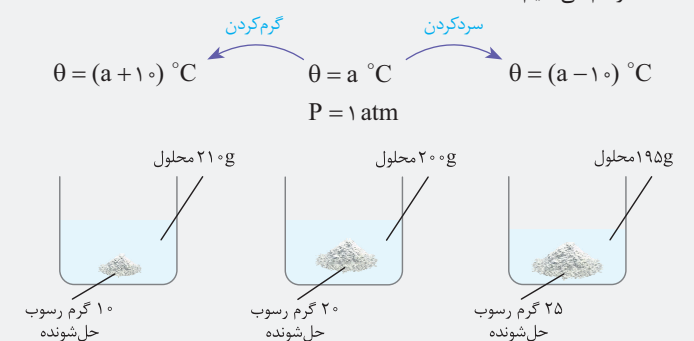
چگالی آب

$$\frac{0.04}{y-a} = \frac{0.08}{x+a} \Rightarrow \frac{x+a}{y-a} = 2 \neq 1$$

همان طور که دیدیم این نسبت برابر ۱ نشد و این عبارت غلطه!

۸۴ - گزینه ۲

☆ شفاف سازی برای درک بهتر و سرعت عمل بیشتر، وضعیت این مخلوط را در دماهای داده شده رسم می کنیم.



با توجه به توضیحات داده شده در سؤال، با افزایش دما، انحلال پذیری این ماده در حلال افزایش می یابد؛ بنابراین انحلال پذیری آن با دما رابطه مستقیم دارد.

با افزایش دما، انحلال پذیری این ماده در آب افزایش می یابد. در دمای 10°C ، نصف رسوب، یعنی 10 گرم آن حل می شود، برای حل شدن 10 گرم رسوب باقی مانده در حلال و تبدیل مخلوط (رسوب و محلول) به یک محلول سیر شده، باید دما بیشتر از 10°C باشد، بنابراین اگر این اتفاق در دمای $b^\circ\text{C}$ رخ دهد، به یقین $b > 10^\circ\text{C}$ است.

بررسی سایر گزینه ها: ① اگر نمودار انحلال پذیری - دما برای این ماده خطی باشد (شیب نمودار ثابت باشد)، می توان گفت با هر 10 درجه افزایش دما، 10 g حل شونده بیشتر در این مقدار حلال حل می شود. ولی با توجه به توضیحات داده شده در سؤال، نمودار خطی نیست (منحنی بوده و شیب ثابت ندارد؛ به ازای 10°C افزایش دما در دماهای مختلف $(10^\circ\text{C}$ تا $a^\circ\text{C}$ و $a^\circ\text{C}$ تا $a+10^\circ\text{C}$ درجه سانتی گراد) مقدار افزایش انحلال پذیری یکسان نیست) و نمی توان گفت که با هر 10 درجه افزایش دما، چه مقدار حل شونده بیشتر می توان در این مقدار حلال حل کرد.

④ با توجه به اطلاعات داده شده، ما فقط می دانیم که انحلال پذیری این ماده با دما رابطه مستقیم دارد. دماهای داده شده در سؤال و موقعیت آن ها نسبت به دمای 0°C مشخص نیست؛ یعنی معلوم نیست که هر یک از این دماها بیشتر از دمای 0°C هستند یا کم تر از آن؛ بنابراین نمی توانیم به مقایسه انحلال پذیری این ماده در دمای 0°C با دماهای داده شده بپردازیم. ④ انحلال این حل شونده در حلال همانند انحلال اغلب نمک ها در آب با افزایش دما، افزایش می یابد. (انحلال پذیری این ماده با دما رابطه مستقیم داشته و انحلال پذیری اغلب نمک ها با دما هم، رابطه مستقیم دارد.)

۸۵ - گزینه ۴

☆ نکته به هنگام رقیق سازی محلول ها با آب، فقط حجم محلول تغییر می کند و شمار مول های حل شونده ثابت است؛ بنابراین خواهیم داشت:

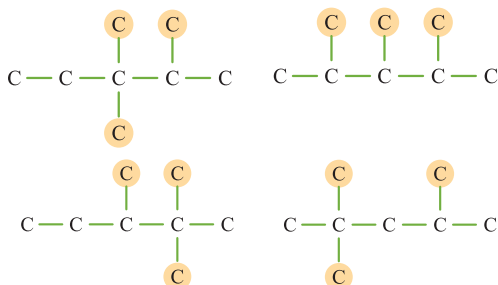
$$\Rightarrow \frac{M_1 V_1}{\text{رقیق}} = \frac{M_2 V_2}{\text{غلظت}} \Rightarrow \text{حجم محلول (V)} \times \text{غلظت مولی (M)} = \text{مول حل شونده (n)}$$

گام ۳ با توجه به فرمول عمومی آلکان‌ها و اطلاعات داده شده در سؤال، شمار اتم‌های کربن آلکان را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{شمار اتم‌های H}}{\text{شمار اتم‌های C}} = \frac{2}{25} \Rightarrow \frac{2n+2}{n} = \frac{2}{25} \Rightarrow 2n+2 = \frac{2n}{25} \Rightarrow 2n+2 = \frac{2n}{25} \Rightarrow 2n+2 = \frac{2n}{25} \Rightarrow n = 8$$

$\Rightarrow$ (اوکتان) C_8H_{18} = آلکان

گام ۴ در ساختار یک آلکان ۸ کربنی با سه شاخه فرعی متیل، زنجیر اصلی دارای ۵ اتم کربن است.



گزینه ۱

با توجه به رابطه گرمای ویژه داریم:

$$c = \frac{Q}{m\Delta\theta} \Rightarrow c_A = 2c_X \Rightarrow \frac{Q_A}{m_A\Delta\theta_A} = 2 \frac{Q_X}{m_X\Delta\theta_X} \Rightarrow \frac{m_A = m_X}{\Delta\theta_A = \Delta\theta_X} \rightarrow Q_A = 2Q_X$$

$$c_A = 2c_X \Rightarrow \frac{Q_A}{m_A\Delta\theta_A} = 2 \frac{Q_X}{m_X\Delta\theta_X} \xrightarrow{\frac{m_A = m_X}{Q_A = Q_X}} \frac{1}{\Delta\theta_A} = \frac{2}{\Delta\theta_X} \Rightarrow \Delta\theta_A = \frac{\Delta\theta_X}{2}$$

۳ نسبت ظرفیت گرمایی (C) به ظرفیت گرمایی ویژه (c) برابر با جرم (m) است. از آنجا که جرم هر دو مایع برابر است؛ پس این نسبت در هر دو یکسان است.

ظرفیت گرمایی ویژه $\rightarrow$ جرم ماده

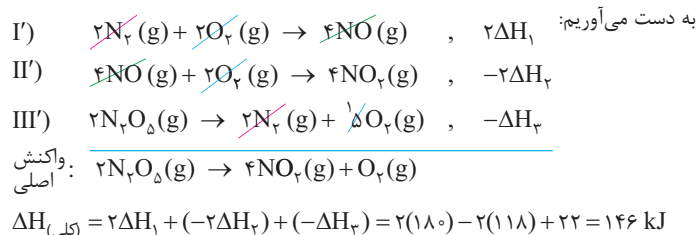
$$C = mc \Rightarrow \frac{C}{c} = m$$

ظرفیت گرمایی $\rightarrow$

۴ از آنجا که ظرفیت گرمایی ویژه A بیشتر از X است، در جرم یکسان، اگر تخم مرغ در A در مدت زمان ۵ دقیقه پخته شود، X به دلیل ظرفیت گرمایی کم‌تر، برای هر درجه کاهش دما (تغییر دما)، گرمای کم‌تری آزاد می‌کند؛ بنابراین برای پختن تخم مرغ در مایع X، زمان بیشتر از ۵ دقیقه نیاز است.

گزینه ۴

گام ۱ براساس قانون هس، در سمت چپ معادله واکنش اصلی، $2N_2O_5$ وجود دارد؛ بنابراین معادله سوم باید معکوس شود. با توجه به این که $4NO_2$ در سمت راست معادله واکنش اصلی وجود دارد، واکنش دوم را معکوس و در ۲ ضرب می‌کنیم، در آخر با توجه به این که N_2 در معادله واکنش اصلی وجود ندارد، برای حذف N_2 (در واکنش III') واکنش اول را در ۲ ضرب کرده و در نهایت با جمع ΔH واکنش‌های جانبی، ΔH واکنش اصلی را به دست می‌آوریم:



تذکره دقت کنید که اگر اختلاف عدد اتمی دو عنصر X و D و دو عنصر A و X برابر در نظر نگیریم، این گزینه می‌تونه درست نباشه. مثلاً اگر A را $^{27}_{13}Al$ و D را یکی از عنصرهای $^{35}_{17}Cl$ یا $^{32}_{16}S$ در نظر بگیریم، رابطه گفته شده برعکس می‌شه:

$$\left(\frac{X}{A} < \frac{D}{X}\right) \Rightarrow \frac{17}{32} < \frac{35}{17} \Rightarrow \frac{17}{32} < \frac{35}{17}$$

۴ این گزینه هم غلطه! X شبه فلز سیلیسیم ($^{28}_{14}Si$) است و با عناصر دیگر تنها می‌تواند الکترون به اشتراک بگذارد. (الکترون مبادله نمی‌کند!)

مشاوره متأسفانه در بعضی از سؤال‌های کنکور، ممکنه عبارتی مبهم باشه یا در حالت کلی، عبارت در مواردی درست درنیاد، مثل **۳** این سؤال. در مواجهه با این تست‌ها غلط بودن سایر گزینه‌ها اون قدر واضحه که می‌شه مطمئن شد که طراح حواسش به ابهام گزینه صحیح نبوده. پس اگر سر جلسه کنکور تصمیم گرفتی حتماً به این تست‌ها پاسخ بدی، باید از وضوح غلط بودن سایر گزینه‌ها و رد گزینه استفاده کنی.

گزینه ۲

گام ۱ معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:



گام ۲ باید با استفاده از جرم $CaSO_4$ ، تفاوت جرم فراورده جامد با فراورده‌های گازی رو به دست بیاریم.

روش استفاده از کسر تناسب: در این روش بازده درصدی در کسر مربوط به واکنش دهنده ضرب می‌شود:

$$\frac{\text{بازده درصدی} \times \text{جرم}}{100} = \frac{\text{تفاوت جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{40}{100} \times \frac{X}{2 \times 136} = \frac{[(\text{جرم مولی} \times \text{ضریب} \times A) + (\text{جرم مولی} \times \text{ضریب} \times B) - (\text{جرم مولی} \times \text{ضریب} \times C)]}{(SO_2 + O_2) - CaO}$$

$$\frac{40}{100} \times \frac{X}{2 \times 136} = \frac{X}{[(2 \times 64) + (1 \times 32)] - (2 \times 56)}$$

$$\Rightarrow X = \frac{40 \times 8 \times 48}{2 \times 136 \times 100} \Rightarrow X = 5/76 \text{ g}$$

روش استفاده از کسر تبدیل:

نکته در مسائلی که بازده درصدی واکنش جزء اطلاعات سؤال است، به جای استفاده از فرمول بازده، می‌توان از کسر تبدیل معادل آن استفاده کرد و مقدار عملی و نظری را به یکدیگر تبدیل کنیم. مثلاً می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{نظری}}{\text{عملی}} = \frac{100 \text{ g نظری}}{a \text{ g عملی}} \Rightarrow \frac{a \text{ g عملی}}{100 \text{ g نظری}} = \frac{a}{100} \Rightarrow \text{بازده درصدی}$$

با توجه به معادله واکنش، اگر ۲ مول $CaSO_4$ تجزیه شود، ۲ مول CaO جامد ($2 \times 56 = 112 \text{ g}$)، ۲ مول گاز SO_2 ($2 \times 64 = 128 \text{ g}$) و ۱ مول گاز O_2 ($1 \times 32 = 32 \text{ g}$) تولید می‌شود؛ پس به ازای ۲ مول $CaSO_4$ ، $128 + 32 - 112 = 48 \text{ g}$ گرم تفاوت جرم خواهیم داشت:

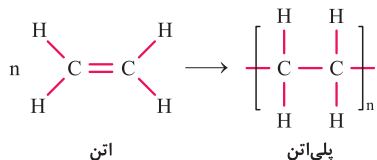
$$\text{کاهش جرم} = 5/76 \text{ g} = \frac{48 \text{ g کاهش جرم}}{2 \text{ mol } CaSO_4} \times \frac{1 \text{ mol } CaSO_4}{136 \text{ g } CaSO_4} \times \frac{40}{100} = 5/76 \text{ g}$$

کسر مربوط به بازده درصدی

گزینه ۱

شفاف سازی سه گروه متیل به معنای سه شاخه فرعی متیل است (متیل برای بیان نام شاخه به کار می‌رود) و نباید گروه‌های $-CH_3$ در ابتدا و انتهای زنجیر اصلی کربنی را در نظر گرفت. اگر در سؤال پرسیده شده بود که در ساختار چند ایزومر، سه گروه $-CH_3$ وجود دارد، در این صورت باید گروه‌های $(-CH_3)$ ابتدا و انتهای زنجیر اصلی هم در نظر گرفته می‌شد.

بررسی سایر گزینه‌ها:  کی گفته! مثلاً در پلی اتن، واکنش دهنده‌ها، مولکول‌های اتن هستند که پیوند دوگانه کربن - کربن دارند، اما در ساختار واحد تکرارشونده پلیمر، همه یوندها بگانه هستند.

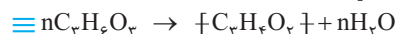
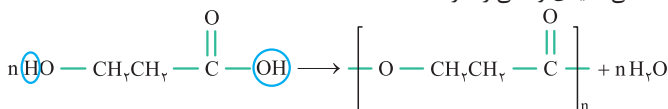


این مورد لزوماً برای همهٔ پلیمرها درست نیست، برای مثال جرم مولی پلیمر در پلی‌استرها یا پلی‌امیدها به دلیل خروج آب (H_2O) هنگام تشکیل آن‌ها، با مجموع جرم مولی مونومرهای سازندهٔ آن‌ها برابر نیست.

نکته به موادی که فرمول مولکولی یکسان اما فرمول ساختاری متفاوت دارند، ایزومر می‌گویند. به جدول زیر که در آن تفاوت‌ها و شباهت‌های ایزومرها آورده شده است، دقت کنید:

تفاوت	شبهات
فرمول ساختاری	فرمول مولکولی
محتوای انرژی	نوع عنصرها
خواص فیزیکی و شیمیایی	تعداد اتمها

کافی به مثال نقض پیدا کنیم. مثلاً فرایند پلیمری شدن مولکولی را در نظر بگیرید که هر دو نوع گروه عاملی اسیدی و الکی را دارد.



فرمول مولکولی، مونومر و واحد تکرارشونده یکسان نیست؛ پس نمی‌توانند ایزومر یکدیگر باشند.

۹۴- گزینه ۴

درس نامه ۱ تعیین عدد اکسایش به روش رسم ساختار لوویس:

برای تعیین عدد اکسایش اتم‌ها، در مواد مولکولی یا یون‌های چنداتی از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

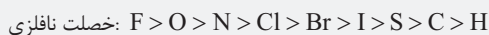
$$\text{عدد اکسایش اتم} = \left(\begin{array}{c} \text{شمار الکترون های} \\ \text{ظرفیت اتم} \end{array} \right) - \left(\begin{array}{c} \text{شمار الکترون های نسبت} \\ \text{داده شده به اتم} \end{array} \right)$$

برای تعیین شمار الکترون‌های نسبت داده‌شده به هر اتم، پس از رسم ساختار لوویس گونه مورد نظر، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

۱- به ازای هر جفت الکترون پیوندی میان دو اتم یکسان، یک الکترون به هر اتم نسبت می‌دهیم.

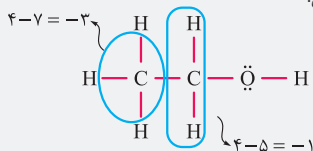
۲- به ازای هر جفت الکترون پیوندی میان دو اتم متفاوت، هر دو الکترون را به اتم با خصلت نافلزای بیشتر، نسبت می‌دهیم.

نکته مقایسهٔ خصلت نافلزی چند عنصر زیر را بلد باشید:



۳- همه الکترون‌های ناپیوندی روی هر اتم را به همان اتم نسبت می‌دهیم.

مثال: محاسبهٔ عدد اکسایش اتم‌های کربن در اتانول:



۲ همه گروه‌های عاملی که در کتاب شیمی ۲ می‌فونین رو در جدول زیر براتون آوردیم:

نام خانواده	فرمول ساختاری و نام گروه عاملی	نام خانواده	فرمول ساختاری و نام گروه عاملی
۱- آلدهیدها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{---C---H} \end{array}$ آلدهیدی	۲- کتون‌ها	$\begin{array}{c} \text{O} \\ \parallel \\ \text{---C---} \end{array}$ کربونیل

گام ۳۶ خب! فهمیدیم که گرمای مورد نیاز به ازای مصرف ۲ مول N_2O_5 ، ۱۴۶ kJ است؛ پس به ازای مصرف یک مول از آن، $73 = \frac{146}{2}$ کیلوژول گرما نیاز است.

تله اگر عجله کنی و حواست به ضریب N_2O_5 در معادله اصلی یا خواسته سؤال به ازای مصرف ۱ مول N_2O_5 نباشه، ممکنه با به دست آوردن ΔH واکنش اصلی، به اشتباه رو انتخاب کنی!

۹۱- گزینه ۳

گام ۱ ابتدا معادلہ واکنش را موازنہ می کنیم:



نکته ۴: باید حساب کنیم که در مدت زمان ۲۰ ثانیه، به ازای مصرف ۵/۴ مول از واکنش دهنده‌ها متناسب با ضرایب استوکیومتری‌شان، چند مول NH_3 تولید می‌شود.

$$\frac{5}{4} \text{ mol واکنش دهنده} \times \frac{2 \text{ mol NH}_3}{9 \text{ mol واکنش دهنده}} = 1/2 \text{ mol NH}_3$$

نکات حالا غلظت مولی NH_3 را بعد از گذشت ۲۰ ثانیه از واکنش $\left(\frac{1}{3}\right)$ دقیقه به دست می آوریم:

$$\text{غلظت مولار} = \frac{\text{مول حل شونده}}{\text{حجم محلول}} = \frac{1/2 \text{ mol}}{2 \text{ L}} = 0.06 \text{ mol.L}^{-1}$$

۴م غلظت NH_3 تولیدی درون مخزن واکنش پس از $\frac{1}{3}$ دقیقه برابر با 6° مولار می‌شود، حالا با فرض ثابت‌بودن سرعت واکنش، حساب می‌کنیم که پس از چند دقیقه غلظت آن به $3/6^\circ$ مولار می‌رسد:

$$3/6 \text{ مولار} \times \frac{1 \text{ دقیقه}}{3 \text{ مولار}} = \frac{36}{18} = 2 \text{ دقیقه}$$

۹۲- گزینه ۱

☆ **نکته** برای محاسبه ΔH یک واکنش با استفاده از آنتالپی‌های سوختن واکنش دهنده‌ها و فراورده‌ها، از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش دهنده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده‌ها}]$$

گام ۱ با توجه به اطلاعات داده شده، آنتالپی سوختن هیدروژن برابر است با:

$$\frac{\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_6)}{\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{H}_2)} = 7/2 \Rightarrow \Delta H_{\text{سوختن}}(\text{H}_2) = \frac{\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_6)}{7/2}$$

عالم  آنتالپی واکنش: $C_2H_4(g) + H_2(g) \rightarrow C_2H_6(g)$ برابر با -166 kJ است. از طرفی آنتالپی سوختن پروپین (C_3H_6) را نیز داریم، حالا به کمک رابطه زیر، آنتالپی سوختن پروپن (C_3H_6) را به دست می‌آوریم:

$$\Delta H_{\text{واکنش}} = [\text{مجموع آنتالپی سوختن فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی سوختن واکنش دهنده‌ها}]$$

$$\Rightarrow \Delta H_{\text{واکنش}} = [\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_2\text{H}_6) + \Delta H_{\text{سوختن}}(\text{H}_2)] - [\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_2\text{H}_4)]$$

$$-166 = (-1940 + \frac{\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_6)}{7/2}) - (\Delta H_{\text{سوختن}}(\text{C}_3\text{H}_6))$$

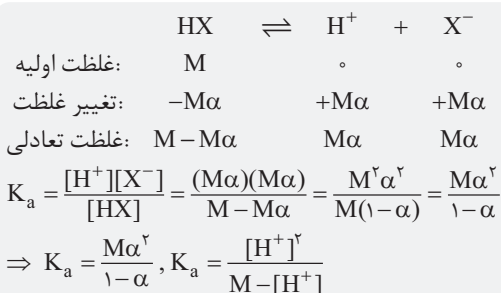
$$1774 = \frac{x}{7/2} - x \Rightarrow 1774 = -\frac{6/2 x}{5/2} \Rightarrow x = -\left(\frac{36}{21}\right) \times 1774$$

$$= -(1 + 0.16) \times 1774 = -(1774 + 283.84) = -2057.84 \approx -2058 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

مشاوره بچه‌ها حواستون باشه که با توجه به نزدیکی اعداد در گزینه‌ها، نمی‌تونید از تقریب در محاسبات آخر استفاده کنید و باید ضرب و تقسیم‌ها را به طور کامل انجام بدید.

۹۳- گزینه ۳

برای عبارت (۳) مثال نقضی نمی‌توانیم پیدا کنیم. در فرایند تهیه پلی‌اتن و مشتقات آن که پلیمر تنها فراوردهٔ واکنش است، همهٔ اتم‌های کربن در ساختار مونومر، در واحد تکرار شونده نیز وجود دارند. در فرایند تهیهٔ پلی‌استرها و پلی‌آمیدها، علاوه بر پلیمر، آب (H_2O) نیز تولید می‌شود؛ یعنی فقط از شمار اتم‌های H و O کاسته می‌شود، اما باز هم شمار اتم‌های کربن تغییری نمی‌کند.



برای اسیدهای خیلی ضعیف (معمولاً با K_a کوچک‌تر از 10^{-5}) و یا مقادیر کم α (معمولاً کم‌تر از 0.05)، می‌توان در عبارت « $1 - \alpha$ » از α صرف نظر کرده و از رابطه تقریبی روبه‌رو استفاده کرد:

ثابت یونش اسیدی (K_a) تنها به دما وابسته است و با رقیق کردن محلول اسیدی تغییری نمی‌کند. همچنین با افزودن آب مقطر، شمار مول‌های اولیه حل‌شده اسید (X) در محلول دستخوش تغییر نمی‌شود و ثابت است. $K_a = M\alpha^2 \Rightarrow K_a = 10^{-5}$ (اسید ضعیف)

$$K_{a1} = K_{a2} \Rightarrow M_1\alpha_1^2 = M_2\alpha_2^2 \Rightarrow \frac{x \text{ mol}}{0.2 \text{ L}} \times \alpha_1^2 = \frac{x \text{ mol}}{1 \text{ L}} \times \alpha_2^2$$

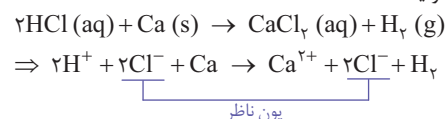
رقیق غلیظ

$$\Rightarrow \frac{\alpha_2^2}{\alpha_1^2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = 0.5 \Rightarrow \frac{\alpha_2}{\alpha_1} = \sqrt{0.5}$$

۹۶- گزینه ۱

شفاف‌سازی پس از واکنش مقدار کافی فلز Ca با 500 میلی‌لیتر محلول HCl ، pH محلول نهایی برابر $1/7$ شده است. اگر مقدار اسید به اندازه مقدار استوکیومتری در واکنش برای مصرف کامل فلز Ca بود، pH محلول نهایی برابر 7 می‌شد، الان که pH محلول نهایی کم‌تر از 7 است؛ یعنی مقدار اسید بیشتر از مقدار استوکیومتری آن در واکنش است.

گام ۱ با توجه به معادله واکنش، می‌توان دریافت که یون کلرید در این واکنش یون ناظر یا تماشاچی است و در واکنش مصرف یا تولید نمی‌شود؛ بنابراین غلظت مولی یون کلرید در محلول ثابت بوده و برابر با غلظت اولیه HCl است.



$$[Cl^-] = [HCl]_{\text{اولیه}} = 5 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام ۲ با توجه به توضیحات آورده‌شده در بخش شفاف‌ساز، متوجه شدیم که مقدار اسید بیشتر از مقدار استوکیومتری آن در واکنش بوده و همه آن در واکنش مصرف نمی‌شود.

$$[HCl]_{\text{مصرفی}} + [HCl]_{\text{باقی‌مانده}} = [HCl]_{\text{اولیه}}$$

با استفاده از pH محلول نهایی، می‌توان غلظت H^+ و غلظت HCl باقی‌مانده در محلول پس از انجام واکنش را به دست آورد، غلظت اولیه HCl را هم که داریم و به راحتی می‌توان غلظت HCl مصرفی در واکنش را به دست بیاریم:

$$\text{محاسبه } [HCl]_{\text{باقی‌مانده}}: [H^+] = 10^{-pH} = 10^{-1/7} = 10^{-2} \times 10^{1/7} \xrightarrow{\log 2 \approx 0.3} 2 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$[HCl]_{\text{باقی‌مانده}} = [HCl]_{\text{اولیه}} - [HCl]_{\text{مصرفی}}$$

$$\Rightarrow [HCl]_{\text{باقی‌مانده}} = 5 \times 10^{-2} - 2 \times 10^{-2} = 3 \times 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$$

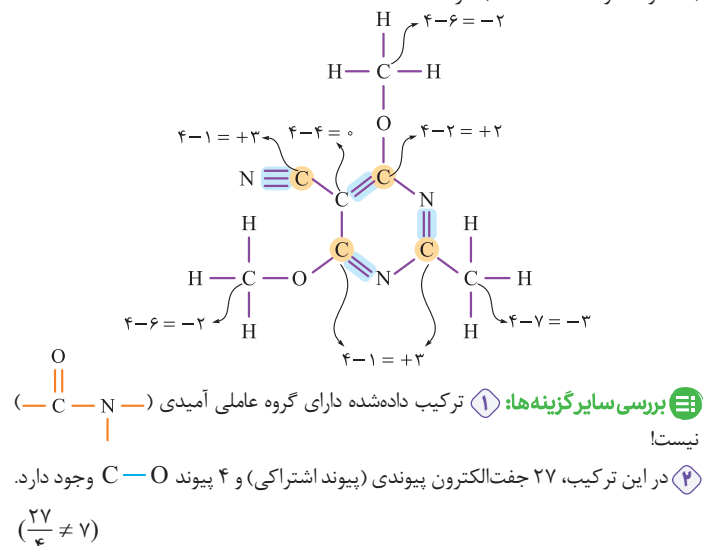
گام ۳ حالا با داشتن غلظت HCl مصرفی در واکنش می‌توانیم از طریق استوکیومتری واکنش، جرم Ca مصرف‌شده و جرم H_2 تولیدشده در واکنش را به دست آوریم:

روش ۱ استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{جرم مولی } H_2}{\text{جرم مولی } Ca} = \frac{\text{جرم مولی } HCl \times \text{غلظت مولی } H_2}{\text{جرم مولی } HCl \times \text{غلظت مولی } Ca}$$

نام خانواده	فرمول ساختاری و نام گروه عاملی	نام خانواده	فرمول ساختاری و نام گروه عاملی
۳- الکل‌ها	$-OH$ هیدروکسیل	۴- اترها	$-O-$ اتری
۵- کربوکسیلیک اسیدها	$\begin{array}{c} O \\ \\ -C-OH \end{array}$ کربوکسیل	۶- استرها	$\begin{array}{c} O \\ \\ -C-O- \end{array}$ استری
۷- آمین‌ها	$\begin{array}{c} R-N-R'' \\ \\ R' \end{array}$ آمینی، حداقل یکی از گروه‌های R, R', R'' گروه هیدروکربنی‌اند.	۸- آمیدها	$\begin{array}{c} O \\ \\ -C-N- \end{array}$ آمیدی

ساختار داده‌شده، ۴ اتم کربن با عدد اکسایش مثبت و در مجموع ۴ پیوند دوگانه و سه‌گانه (۳ تا دوگانه و ۱ عدد سه‌گانه) دارد.



نکته برای تعیین جفت الکترون‌های پیوندی علاوه بر ساختار می‌توانید از فرمول هم استفاده کنید.

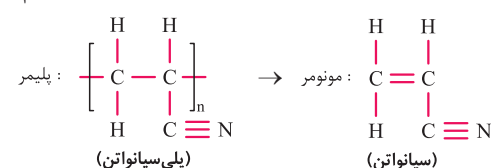
$$\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی} = \frac{(\text{شمار اتم‌های H} \times 1) + (\text{شمار اتم‌های C} \times 4) + (\text{شمار اتم‌های N} \times 3) + (\text{شمار اتم‌های O} \times 2)}{2}$$

$$\text{فرمول مولکولی ماده: } C_8H_9O_2N_2$$

$$\text{شمار جفت الکترون‌های پیوندی در ترکیب} = \frac{(4 \times 8) + (1 \times 9) + (2 \times 2) + (3 \times 3)}{2} = \frac{54}{2} = 27$$

۳) از پلی‌سیانواتن در تهیه پتو استفاده می‌شود که مونومر سازنده آن سیانواتن، $C_2H_2N_2$ با ۳ اتم هیدروژن است. از طرفی ترکیب داده‌شده ۸ اتم کربن دارد.

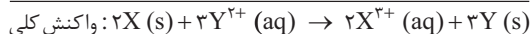
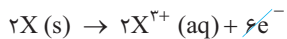
$$\frac{8}{3} \neq 2$$



۹۵- گزینه ۲

درس‌نامه رابطه ثابت یونش و درجه یونش:

اگر درجه یونش اسید ضعیف HX برابر α و غلظت اولیه اسید برابر M باشد، اسید به اندازه $M\alpha$ یونیده شده و غلظت تعادلی آن برابر با $M - M\alpha$ خواهد بود؛ پس می‌توان نوشت:



ضریب $Y > X$

بررسی سایر گزینه‌ها: Y کاتد و X آند است.

$$emf(X-Y) = E^{\circ}(Y^{2+}/Y) - E^{\circ}(X^{3+}/X) = 1/2 - (-0/74) = 1/94 \text{ V}$$

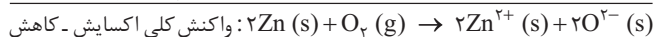
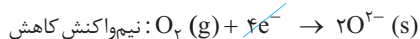
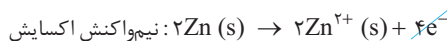
با توجه به معادله نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش، در معادله واکنش کلی سلول گالوانی Y و X ۶ مول الکترون مبادله می‌شود نه ۳ مول!

درسته که Y کاتد است، اما جهت جریان الکترون از سیم یا مدار بیرونی از سمت آند (X) به سمت کاتد (Y) است.

مشاوره این تست همانند خیلی از تست‌های کنکور سراسری، دقیقاً شبیه‌ساز خود تمرین‌های کتاب درسیه! پس اگر نتوانستی این تست رو حل کنی، برگرد و دوباره تمرین‌های کتاب رو حل کن که اهتمامش زیاده توکنکور، مستقیم از همینا تست بیار.

۹۹- گزینه ۳

در واکنش بین اتم‌های روی (Zn) و گاز اکسیژن (O_2)، هر اتم روی دو الکترون از دست می‌دهد و اکسایش می‌یابد و هر مولکول O_2 ۴ الکترون می‌گیرد و کاهش می‌یابد. حواستون باشه که واکنش‌ها در محلول آبی انجام نمی‌شوند و حالت فیزیکی فلز روی و یون‌های روی و اکسید تولیدشده جامد (جامد روی اکسید) (S) باید باشد.

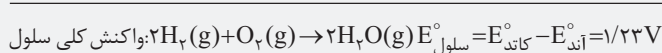
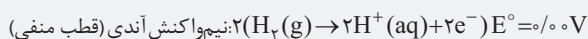


۱۰۰- گزینه ۱

درس‌نامه

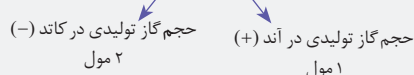
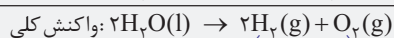
۱ سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن

نوعی سلول گالوانی است و به منظور تولید جریان برق در آن گاز هیدروژن به آرامی اکسید می‌شود.

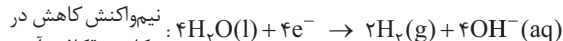
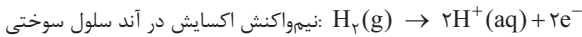


۲ سلول برقکافت آب

یک سلول الکترولیتی است که در آن جریان برق از آب عبور داده می‌شود و طی آن آب به عناصر سازنده‌اش (H_2 و O_2) تجزیه می‌شود.



در آند سلول سوختی، گاز هیدروژن اکسایش می‌یابد و یون هیدرونیوم تولید می‌شود.



کاتد برقکافت آب

بررسی سایر گزینه‌ها: سلول برقکافت آب نوعی سلول الکترولیتی و سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن، نوعی سلول گالوانی است.

در هر دو سلول گالوانی و الکترولیتی، الکترون‌ها در مدار بیرونی از آند به سمت کاتد جابه‌جا می‌شوند، اما با توجه به این که قطب مثبت و منفی در این دو سلول با هم فرق می‌کنند، خواهیم داشت:



$$\begin{aligned} x &= \frac{40 \times 3 \times 10^{-2} \times 0/5}{2} \\ \Rightarrow x &= 0/3 \text{ g Ca} \\ y &= \frac{40 \times 3 \times 10^{-2} \times 0/5}{1 \times 2} \\ \Rightarrow y &= 0/15 \text{ g H}_2 \end{aligned}$$

روشن استفاده از کسر تبدیل:

$$0/5 \text{ L HCl} \times \frac{3 \times 10^{-2} \text{ mol HCl}}{1 \text{ L HCl}} \times \frac{1 \text{ mol Ca}}{2 \text{ mol HCl}} \times \frac{40 \text{ g Ca}}{1 \text{ mol Ca}} = 0/3 \text{ g Ca}$$

$$0/5 \text{ L HCl} \times \frac{3 \times 10^{-2} \text{ mol HCl}}{1 \text{ L HCl}} \times \frac{1 \text{ mol H}_2}{2 \text{ mol HCl}} \times \frac{2 \text{ g H}_2}{1 \text{ mol H}_2} = 0/15 \text{ g H}_2$$

۹۷- گزینه ۲

از محلول آمونیاک (NH_3) به عنوان شیشه‌پاک‌کن استفاده می‌شود. آمونیاک از جمله بازهای ضعیف است که در محلول آن در هر شرایطی علاوه بر مقدار کمی از یون‌های آبپوشیده، شمار بسیاری از مولکول‌های آمونیاک هم وجود دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها: رسانایی الکتریکی به غلظت یون‌های موجود در محلول وابسته است؛ پس بدون دانستن غلظت محلول‌ها (بازها) و فقط با داشتن K_b آن‌ها نمی‌توان رسانایی الکتریکی آن‌ها را با هم مقایسه کرد.

بازم همون مشکل قبلی در 1 رو داره! بدون دانستن غلظت مولی محلول‌ها، نمی‌توان مقدار عددی pH آن‌ها را دانست و یا با هم مقایسه‌شون کرد.

pH یک محلول به غلظت یون هیدرونیوم در آن وابسته است. اگر چه سدیم هیدروکسید ($NaOH$) یک باز قوی و آمونیاک (NH_3) یک باز ضعیف است، اما با غلظت‌های متفاوت، می‌تواند pH یکسان داشته باشند.

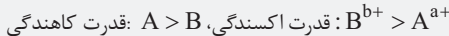
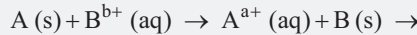
۹۸- گزینه ۴

درس‌نامه ۱ برای محاسبه ولتاژ یک سلول گالوانی که به نیروی الکتروموتوری (emf) هم معروف است، باید E° آند را از E° کاتد کم کنیم:

$$emf = E^{\circ} = E^{\circ}_{\text{سلول}} = E^{\circ}_{\text{کاتد}} - E^{\circ}_{\text{آند}} = E^{\circ}_{\text{بزرگتر}} - E^{\circ}_{\text{کوچکتر}}$$

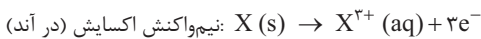
۲ در یک واکنش اکسایش - کاهش، به گونه‌ای که اکسایش می‌یابد، کاهنده و به گونه‌ای که کاهش می‌یابد، اکسنده می‌گویند.

۳ در واکنش‌هایی که به طور طبیعی انجام می‌شوند، قدرت کاهندگی فلز و قدرت اکسندگی کاتیون فلز که در سمت واکنش‌دهنده‌ها قرار دارند، به ترتیب بیشتر از قدرت کاهندگی فلز و قدرت اکسندگی کاتیون فلزی است که در سمت فراورده‌ها قرار دارند.



۴ اگر قدرت کاهندگی فلز A از B بیشتر باشد (E° فلز A کم‌تر باشد)، فلز A می‌تواند با نمک‌های فلز B به طور طبیعی واکنش دهد.

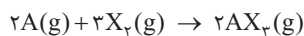
ابتدا باید با توجه به اطلاعات داده‌شده بفهمیم که پتانسیل کاهشی X و Y مثبت هستند یا منفی! می‌دانیم که در سلول گالوانی، کاتیون‌ها به سمت کاتد حرکت می‌کنند؛ بنابراین در سلول گالوانی $X - SHE$ ، SHE کاتد است و در سری الکتروشیمیایی بالاتر از X قرار دارد؛ پس E° مربوط به X منفی است ($E^{\circ}(X^{3+}/X) = -0/74 \text{ V}$)، می‌دانیم که محلول نمک یا کاتیون یک فلز را نمی‌توان در ظرفی از جنس فلز پایین‌تر در سری الکتروشیمیایی نگاه‌داری کرد؛ بنابراین با توجه به این که فلز X با Y^{2+} واکنش می‌دهد و Y در سری الکتروشیمیایی بالاتر از X قرار دارد، با توجه به مقدار عددی آن، E° آن مثبت ($+1/20 \text{ V}$) می‌شود.
 خلاصه این‌که در سلول گالوانی حاصل از X و Y ، Y کاتد و X آند است.



برای برابری الکترون‌ها در دو نیم‌واکنش، نیم‌واکنش اکسایش را در ۲ و نیم‌واکنش کاهش را در ۳ ضرب می‌کنیم:

۱۰۳- گزینه ۲

گام ۱: معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:



گام ۲: ΔH واکنش، یعنی گرمای آزاد شده به ازای مصرف ۲ مول A را به دست می‌آوریم:

$$2 \text{ mol } A \times \frac{-40 \text{ kJ}}{1 \text{ mol } A} = -80 \text{ kJ}$$

گام ۳: تفاوت سطح انرژی قله با فراورده، همان انرژی فعال سازی واکنش برگشت (E'_a) است.

$$\Delta H = E_a - E'_a \Rightarrow -160 = 120 - E'_a \Rightarrow E'_a = 280 \text{ kJ}$$

۱۰۴- گزینه ۴

نکته: اثر عوامل مختلف بر تعادل:

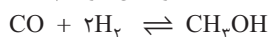
عامل	عکس‌العمل تعادل به تغییر	چگونگی تغییر ثابت تعادل (K) با جابه‌جاشدن تعادل
تغییر غلظت	افزایش غلظت یک ماده	تغییر نمی‌کند.
	کاهش غلظت یک ماده	تغییر نمی‌کند.
تغییر حجم (فشار)	افزایش حجم (کاهش فشار) سامانه	تغییر نمی‌کند.
	کاهش حجم (افزایش فشار) سامانه	تغییر نمی‌کند.
تغییر دما	واکنش‌های گرماده	کاهش دما
	واکنش‌های گرماگیر	افزایش دما
	واکنش‌های گرماده	افزایش دما
	واکنش‌های گرماگیر	کاهش دما

با افزایش حجم، فشار کم می‌شود و واکنش به سمت تعداد مول‌های گازی بیشتر می‌رود. ما می‌خواهیم با افزایش حجم، واکنش در جهت رفت (افزایش درصد مولی فراورده (ها)) جابه‌جا شود؛ پس باید تعداد مول‌های گازی فراورده‌ها بیشتر از واکنش‌دهنده‌ها باشد که فقط و فقط در (۴) تعداد مول‌های گازی فراورده بیشتر است.

دیرین می‌شد! بدون در نظر گرفتن دما به جواب رسیدیم! با این حال در (۴) واکنش گرماگیر است و با افزایش دما، تعادل در جهت مصرف گرما یعنی در جهت رفت پیش می‌رود.

۱۰۵- گزینه ۳

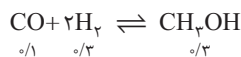
گام ۱: با توجه به معادله واکنش خواهیم داشت:



تعداد مول آغازی	۰/۴	۰/۹	۰
تغییر تعداد مول‌ها	-x	-2x	+x
تعداد مول تعادلی	۰/۴-x	۰/۹-2x	x

$$CH_3OH \text{ تعادلی } H_2 \text{ تعادلی} \Rightarrow x = 0/9 - 2x \Rightarrow 3x = 0/9 \Rightarrow x = 0/3$$

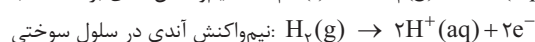
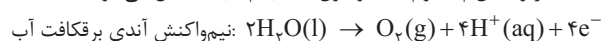
پس در هنگام تعادل، مول‌های مواد شرکت‌کننده در تعادل به این صورت است:



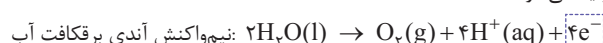
گام ۲: حالا غلظت‌های تعادلی را در رابطه ثابت تعادل قرار می‌دهیم. (حجم ظرف فراموش نشود!)

$$K = \frac{[CH_3OH]}{[CO][H_2]^2} = \frac{(0/3)}{(0/4-x)(0/9-2x)^2} = 12$$

۳) فراورده‌های نیم‌واکنش آندی برق‌کافت آب، H^+ و O_p و گاز ورودی به آند در سلول سوختی، H_2 است. از واکنش O_p و H_2 ، مولکول آب (H_2O) تشکیل می‌شود.

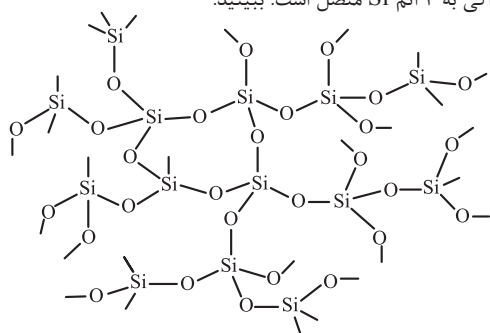


۴) در نیم‌واکنش آندی برق‌کافت آب و سلول سوختی هیدروژن - اکسیژن، به ترتیب ۴ و ۲ الکترون تولید می‌شود.

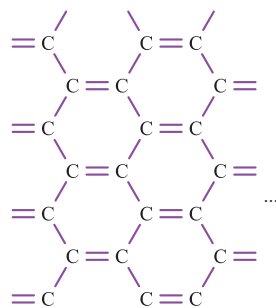


۱۰۱- گزینه ۳

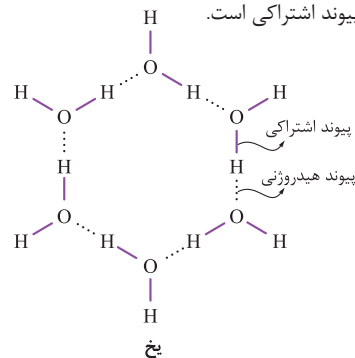
در ساختار سیلیس (SiO_2)، هر اتم Si با چهار پیوند اشتراکی به ۴ اتم O و هر اتم O با دو پیوند اشتراکی به ۲ اتم Si متصل است. ببینید:



بررسی سایر گزینه‌ها: ۱) هر حلقه شش‌ضلعی در ساختار گرافیت شامل ۸ پیوند اشتراکی (۴ پیوند یگانه و ۲ پیوند دوگانه) و در ساختار یخ هر حلقه شش‌ضلعی شامل ۶ پیوند اشتراکی است.



یک صفحه گرافیتی



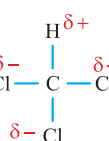
۲) چگالی گرافیت (2.27 g.cm^{-3}) از چگالی آب (1 g.cm^{-3}) بیشتر است و روی آب شناور نمی‌ماند.

۴) سیلیس خالص (SiO_2) در ساخت منشورها و عدسی‌ها به کار می‌رود. در ساختار این ماده، شمار زیادی از اتم‌های Si و O با پیوندهای اشتراکی $Si-O-Si$ به یکدیگر متصل‌اند.

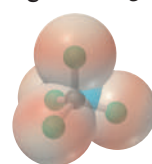
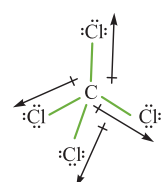
۱۰۲- گزینه ۱

آب (H_2O) یک مولکول قطبی است؛ بنابراین با نزدیک کردن یک میله شیشه‌ای مالش داده شده به موی سر که دارای بار منفی است، به باریکه آب، مولکول‌های H_2O از سمت اتم‌های H که دارای بار جزئی مثبت (δ^+) می‌باشند، جذب میله می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها: ۲) در مولکول کلروفرم ($CHCl_3$)، اتم‌های جانبی ۲ نوع هستند و اتم‌های کلر دارای بار جزئی منفی و اتم H دارای بار جزئی مثبت است.



۳) بوتان (C_4H_{10}) در دمای اتاق گازی شکل است نه مایع!



۴) توزیع بار الکتریکی در مولکول‌های

ناقطبی مانند کربن تتراکلرید (CCl_4)

متقارن است.

